

**GUIA DE INTRODUCCION  
AL METODO DE LOS  
ELEMENTOS DE CONTORNO.**

**E. ALARCON  
P. REYERO**

I.S.B.N.: 84-7484-035-X

Depósito Legal: M-38115-1983

Impreso en la Sección de Publicaciones  
E.T.S. de Ingenieros Industriales.  
José Gutiérrez Abascal, 2  
MADRID (6)

A COVA , CANDE Y ARAN

## PRESENTACION

Entre la impresionante floración de procedimientos de cálculo, provocada por la aplicación intensiva del ordenador, el llamado Método de los elementos de Contorno ( Boundary Element Method o Boundary Integral Equation Method ) parece afianzarse como una alternativa útil al omnipresente Método de los Elementos Finitos que ya ha sido incorporado, como una herramienta de trabajo mas, al cotidiano quehacer de la ingeniería.

En España, tras unos intentos precursores que se señalan en el texto, la actividad mas acusada en su desarrollo y mejora se ha centrado alrededor del Departamento que dirige uno de los autores. Después de la tesis doctoral de J.Dominguez en 1977 que introdujo en España la técnica del llamado 'metodo directo', se han producido numerosas aportaciones en forma de artículos o tesis de investigación que han permitido alcanzar un nivel de conocimientos notable.

En esta obra se pretende transmitir parte de la experiencia adquirida, siquiera sea a nivel elemental y en un campo limitado de aplicación.

La filosofía es semejante a la del pequeño libro de Hinton y Owen 'A simple guide to finite elements' (Pineridge Press 1980) que tanta aceptación ha tenido entre los principiantes.

El libro se articula alrededor de un sólo tema, la solución del problema de Laplace, y se limitan los desarrollos matemáticos al mínimo imprescindible para el fácil seguimiento de aquél.

Tras unos capítulos iniciales de motivación y centrado se desarrolla la técnica para problemas planos, tridimensionales y axisimétricos, limitando los razonamientos a los elementos más sencillos de variación constante o lineal. Finalmente, se incluye un capítulo descriptivo donde se avizoran temas que puedan provocar un futuro interés del estudioso.

Para completar la información se ha añadido un apéndice en el que se recoge un pequeño programa para microordenador, con el objetivo de que se contemple la sencillez de programación para el caso plano. El programa es mejorable en muchos aspectos pero creemos que, con ello, mantiene un nivel de legibilidad adecuado para que el lector ensaye sobre él las modificaciones que se indican en los ejercicios a final de capítulo y,

justamente la provocación de ese aprendizaje es nuestro objetivo final .

El impulso para la redacción de estas notas ha venido de varios frentes ; entre ellos cabe citar a nuestro colega Alfonso Fernandez Canteli que ha mantenido una cariñosa pero permanente presión para que se compusiera una introducción al metodo manejable por estudiantes que comienzan o profesionales con poco tiempo para gastar en sutilezas académicas . También a Rafael Blázquez y Manolo Pastor que tuvieron la amabilidad de organizar unas charlas sobre el M.E.C. en el Laboratorio de Puertos del M.O.P.U. , y sin olvidar a Milagros Couchoud , cuya firmeza al exigir documentación escrita para aquéllas ha provocado la aparición de este pequeño manual.

Una influencia profunda han tenido , evidentemente , los colegas que han trabajado el Metodo , de los que hemos aprendido todo lo que mas adelante se expone . A José Domínguez , Antonio Martín, Federico París , Rafael Picón , Manuel Doblaré , Vicente Roures , Francisco García-Benítez , Juanjo Anza , Sagrario Gomez-Lera , Carlos García-Suarez , Ignacio Rodríguez , Miguel Hacar y demas estudiosos , con los que se han compartido apasionantes horas de discusión y esfuerzo intelectual , se debe la posibilidad de esta obrita . Pero a sus publicaciones se debe acudir si se desea alcanzar un conocimiento profundo del M.E.C.!

Un ruego , finalmente , al lector ; además de la benevolencia hacia los errores y erratas que previsiblemente va a encontrar en una obra compuesta en ratos robados a las obligaciones diarias , esperamos su colaboración para que nos las comunique y poder así corregirlas en una eventual reedición . Gracias por ello .

Majadahonda , verano de 1983.

## INDICE

CAPITULO I.	
INTRODUCCION.....	1

- 1.1.HISTORIA DEL METODO
- 1.2.EL METODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO
- 1.3.CAMPOS DE APLICABILIDAD
- 1.4.ETAPAS BASICAS DEL METODO
- 1.5.LA SOLUCION FUNDAMENTAL

CAPITULO II.DESCRIPCION DEL	
CONTENIDO.....	10

- 2.1.PROBLEMAS DE POTENCIAL
- 2.2.METODOS PROYECTIVOS
- 2.3.EL METODO DIRECTO

CAPITULO III.ALGUNAS RELACIONES CLASICAS.....	19
---	----

- 3.1.EL TEOREMA DE LA DIVERGENCIA Y LAS FORMULAS DE GREEN
- 3.2.POTENCIALES NEWTONIANOS PUNTUALES.TEOREMA DE GAUSS
- 3.3.POTENCIALES DE CAPA SIMPLE,CAPA DOBLE Y VOLUMETRICO
- 3.4.DISCONTINUIDADES DE LOS POTENCIALES SUPERFICIALES
- 3.5.FORMULAS DE GREEN.ECUACION EN EL CONTORNO
- 3.6.CASO BIDIMENSIONAL

PITULO IV.PROBLEMAS PLANOS.....32

- 4.1.DEFINICIONES Y NOTACION
- 4.2.ELEMENTOS CONSTANTES
- 4.3.INTEGRACION NUMERICA
- 4.4.ELEMENTOS LINEALES
- 4.5.EJERCICIOS

CAPITULO V . PROBLEMAS  
TRIDIMENSIONALES.....55

- 5.1.PROBLEMA TIPO
- 5.2.ECUACION INTEGRAL Y SOLUCION FUNDAMENTAL
- 5.3.ELEMENTOS DE CONTORNO
- 5.4.CALCULO DE LOS ELEMENTOS EN A Y B
- 5.5.EJEMPLO
- 5.6.ELEMENTOS DE ORDEN SUPERIOR
- 5.7.TRATAMIENTO DE LAS INTEGRALES DE VOLUMEN
- 5.8.EJEMPLO
- 5.9.EJERCICIOS

CAPITULO VI . PROBLEMAS CON SIMETRIA DE REVOLUCION.....79

- 6.1.LA ECUACION BASICA
- 6.2.ELEMENTOS DE CONTORNO
- 6.3.MEDIOS ANISOTROPOS
- 6.4.EJERCICIOS

CAPITULO VII . TEMAS ADICIONALES.....	96
---------------------------------------	----

7.1.MEDIOS HETEROGENEOS A TROZOS	
7.2.CONEXION ELEMENTOS FINITOS-ELEMENTOS DE CONTORNO	
7.3.ELEMENTOS DE CONTORNO ADAPTABLES	
7.4.ELECCION DE LAS FUNCIONES DE INTERPOLACION.ELEMENTOS NATURALES.	
7.5.JERARQUIA DE FUNCIONES DE INTERPOLACION	
7.6.JERARQUIZACION DE LAS MATRICES DE INFLUENCIA	
7.7.CRITERIO DE PARADA	
7.8.EJEMPLO	

APENDICE.....	114
---------------	-----

PROGRAMA CABEM EN  
MICROCOMPUTADOR

REFERENCIAS.....	133
------------------	-----



## CAPITULO 1

### INTRODUCCION

En este capítulo se va a proceder a describir algunas de las circunstancias que rodean el método, así como sus etapas básicas y una primera comparación con otros procedimientos numéricos de uso más habitual. Como veremos, es inmediato apreciar las ventajas que el M.E.C. presenta frente a ellos. El posible entusiasmo inicial, que es deseable en el novicio, debe ponderarse, sin embargo, ya que, según se verá en capítulos posteriores, existen igualmente limitaciones que acotan la utilidad real a determinados problemas. El número de estos, no obstante, es suficiente para justificar el interés y actividad que, entre los investigadores de todo el mundo, ha despertado el nuevo instrumento.

#### 1. HISTORIA DEL METODO.

Como ha sucedido con muchos procedimientos numéricos actuales, el método de los elementos de contorno se ha desarrollado gracias a las posibilidades computacionales ofrecidas por los modernos ordenadores, sobre bases absolutamente 'clásicas'. En efecto, el planteamiento teórico se apoya en conceptos de teoría del potencial que se hallan incorporados desde hace tiempo a los contenidos de la mayoría de las carreras científicas. El retraso en su popularización es, probablemente, debido al enorme ímpetu con que el método de los elementos finitos penetró en los ambientes académicos y prácticos. No obstante, esta precursión ha sido beneficiosa, ya que el M.E.C. utiliza con éxito resultados y técnicas que se han desarrollado en las pasadas décadas para el M.E.F., hasta el punto que algunos autores [1], lo consideran como un caso particular de éste.

El primer artículo que se suele citar al hablar del M.E.C. fue publicado por JASWON [2] y trataba sobre la teoría del

potencial,utilizando los elementos mas simples de flujo y potencial constante.Inmediatamente RIZZIO [3] public6 la posible aplicaci6n a la teorfa de la elasticidad y juntamente con CRUSE[4] inici6 un fecundo periodo con aplicaciones a problemas de din6mica,teorfa de la fractura,etc.

La siguiente aportaci6n,que puede considerarse clave,fue realizada por LACHAT y WATSON [5] incorporando toda la filosoffa de discretizaci6n y c6culo del M.E.F., de modo que en ocasiones se habla de la 'segunda generaci6n' del M.E.C.que ha facilitado el desarrollo actual.En paralelo con la linea anterior pueden citarse tambien los trabajos de HESS [6] en problemas tridimensionales de fluidos,o los de TOMLIN [7],BUTTERFIELD [8] y BANERJEE [9] aplicando lo que , mas adelante , se denominar6 metodo 'indirecto' a problemas de filtraciones o pilotajes.Una curiosa particularizaci6n de este 6ltimo ha sido desarrollada por CROUCH [10] y aplicada a trabajos mineros;esencialmente consiste en graduar la apertura de un numero finito de fisuras en un espacio infinito,para conseguir que , en una serie de puntos del contorno del dominio en estudio , se produzcan las condiciones de borde establecidas;por ello se denomina 'metodo de las discontinuidades'.

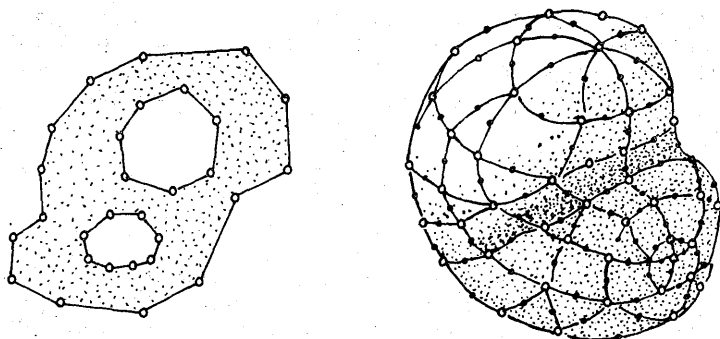


FIGURA 1.

Actualmente el M.E.C. se encuentra bien establecido habi6ndose publicado numerosas obras de introducci6n [11] , [12] , [13] ,o desarrollo [14] , [15] , [16] ; en este sentido es destacable la serie de congresos promovidos por BREBBIA desde 1978 [17],[18],[19],[20],[21] , y que han servido para provocar la continua investigaci6n sobre aquel.

En nuestro pais las primeras contribuciones sobre el metodo indirecto son debidas a JIMENEZ SALAS [22] y a OTEO[23].A partir de la tesis doctoral de DOMINGUEZ [24],el autor ha contribuido a

la aplicación del método directo a una serie de problemas muy variados, en colaboración con MARTIN , PARIS , DOBLARE , GARCIA-BENITEZ , ROURES , ANZA , GOMEZ-LERA , GARCIA-SUAREZ , RODRIGUEZ , etc. así como al método de las discontinuidades con PICON . (Ver referencias [24] y siguientes) . Estos investigadores y otros de incorporación reciente están contribuyendo activamente a la aplicabilidad del M.E.C. a problemas de interés general.

## 2. EL METODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO.

La técnica que nos ocupa , procede discretizando el contorno del dominio en estudio (fig. 1) , mediante la subdivisión en elementos que simbolizan la zona en la que , los valores especificados o incógnitas de las condiciones de contorno del problema planteado, se suponen variando de una forma predefinida: es decir, se admite que varían lineal, parabólicamente , etc. según el grado de precisión que se estime adecuado. Desde este punto de vista, el procedimiento es semejante al del M.E.F. y la hipótesis anterior se identificaría con las 'funciones de interpolación' habituales . Una primera y notable diferencia es sin embargo la que supone la discretización del contorno en lugar del dominio con las previsibles ventajas de sencillez que ello conlleva.

Otra importante distinción radica en los valores de las magnitudes manejadas por el método, que corresponden exactamente con las variables de campo del problema que se trate ( vg.: tensiones , flujos , etc ) desapareciendo el concepto de 'fuerza equivalente' en los nodos . Ello es debido fundamentalmente a que la interpolación precitada se realiza simultáneamente en ambas variables duales del problema : desplazamientos y tensiones en elasticidad , potenciales y flujos en teoría del potencial , etc.

Conviene indicar que dichas interpolaciones pueden ser independientes , ya que no existe ninguna relación entre la evolución de aquéllas a lo largo del contorno ; es habitual , sin embargo , aplicar el mismo tipo de interpolación ( constante , lineal , parabólico , ...) a ambas variables . En algunos casos puede resultar ventajoso utilizar una mezcla de grado diferente , generando los llamados 'elementos mixtos' [35] , y un caso interesante se presenta en la incorporación de funciones predefinidas que sirvan , por ejemplo , para recoger un comportamiento singular en una zona ( caso de las concentraciones de tensión o de los puntos singulares en general ) [36].

Es interesante hacer notar desde este momento que la base del procedimiento radica en la obtención de los valores de las variables en el contorno . Si se desean calcular valores en puntos internos del dominio , es preciso establecer un algoritmo complementario que , en general , es relativamente costoso . Como es bien sabido el M.E.F. trabaja justamente con valores definidos

en el dominio y ello hace que la salida incluya ambos tipos de resultados . De lo previamente dicho , cabe inferir que , en general , el M.E.C. sera preferible en aquellos casos en que solamente interesen los valores en el contorno del dominio en estudio , o en unos pocos puntos internos ; debiendo no olvidarse tambien la ventaja que supone el manejar una dimension inferior de cara a la discretización del contorno y la consiguiente entrada de datos.

Se citará , finalmente , una diferencia mas técnica que no es patente al usuario pero que gravita fuertemente sobre la efectividad del metodo y sobre el programador . Nos referimos a las funciones de ponderacion que , por un lado , constituyen el núcleo de las ventajas del método pero que en esas mismas ventajas contienen sus inconvenientes ; se quiere decir que las funciones de ponderación estan definidas globalmente , en oposicion a las del M.E.F. o a las de interpolación . Ello implica dos consecuencias graves : por un lado las matrices resultantes tras el proceso de discretización son llenas y , por otro , son asimétricas. Lo que obliga al desarrollo de algoritmos distintos a los habituales en el M.E.F. , y repercute en los sistemas de almacenamiento y resolucion en el ordenador , pero no afecta sustancialmente al usuario. En cualquier caso , y debido a la interpolación simultanea de todas las variables de campo , cabe esperar una mejor precisión en los resultados que se obtengan , segun se verá mas adelante .

### 3. CAMPOS DE APLICABILIDAD.

Las áreas a las que puede ser aplicado el M.E.C. son enormemente variadas segun se puede comprobar repasando la bibliografia mencionada anteriormente. Los ejemplos mas abundantes se refieren a problemas de potencial : conduccion de calor , filtraciones , torsion de Saint-Venant , etc. asi como a temas relacionados con la elasticidad , plasticidad , fractura , etc . En principio el campo ideal de aplicacion son los problemas lineales definidos sobre dominios homogéneos e isótropos , en los que se conozca una solucion fundamental ( ver capitulo siguiente ) de la ecuacion de campo .

La limitacion de anisotropía es relativamente sencilla de eliminar , asi como la de heterogeneidad continua , aunque esta ultima exige el conocimiento de la correspondiente solucion fundamental . El caso de heterogeneidad a trozos se resuelve

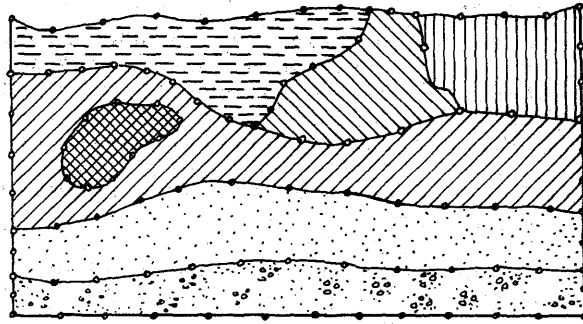


FIGURA 2

mediante una técnica de zonificación (fig.2), aplicando a cada subdominio la correspondiente solución fundamental. Ello es interesante también cuando se trata con cuerpos alargados, que obligarían a un incremento innecesario de elementos en el contorno por simples cuestiones computacionales (fig.3), o en

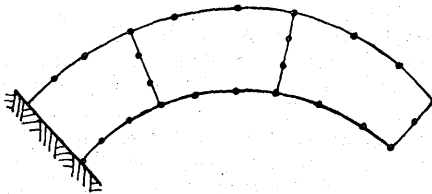


FIGURA 3

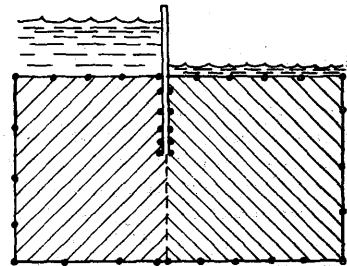


FIGURA 4

casos de separaciones con espesor pequeño o nulo (fig.4), donde sería complicado establecer condiciones distintas en un mismo nodo, según la zona desde la que se contemple el problema. En algunas ocasiones este tipo de zonificación se introduce de forma arbitraria para provocar matrices formadas por bloques que puedan ser tratados convenientemente en el ordenador (ver, por ejemplo, DOBLARE [28]).

En problemas no lineales, o en aquellos en los que se utiliza una solución fundamental aproximada, aparecen en la formulación integrales de volumen sobre cantidades que varían de forma, en general, arbitraria sobre el dominio. Para su evaluación la técnica habitual es la definición de celdas de integración (fig.5), en las que se supone una evolución de las incógnitas en función de los valores nodales. No se trata, sin embargo, de elementos ya que dichos valores no intervienen como incógnitas en las ecuaciones del problema. En algunos casos, como el de la plastificación progresiva, solo es necesario definir las en las

zonas donde se prevea la citada plastificación . Hay que reconocer , sin embargo , que parte de la espectacularidad y comodidad del metodo se pierde en estos casos , pues es preciso definir la malla del dominio , al igual que en M.E.F. y calcular los valores en los puntos nodales de dicha malla , lo que , según se dijo mas arriba , es costoso . Ultimamente se están realizando diversos intentos para simplificar esta situación (ver Garcia Suarez [34] ) .

Un área específica de aplicabilidad es el tratamiento de zonas con contornos en el infinito tal como aparece en problemas de

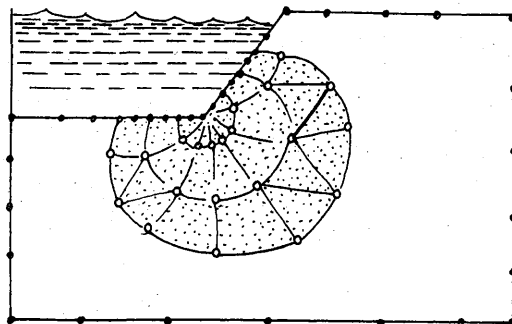


FIGURA 5

interacción terreno-estructura o fluido-estructura (fig.6 ) . En estos casos las variables de interés estan relacionadas con una pequeña parte del dominio (la estructura ) donde interesa un conocimiento detallado de las variables de campo , mientras que en el resto se limita a la zona de contacto o interfase . Un procedimiento adecuado es entonces la aplicacion del M.E.F. a la discretización de la estructura y la modelización del medio circundante con el M.E.C. (Zienkiewicz lo llama 'marriage a la mode' ), con lo que se aprovechan las ventajas y se eliminan los inconvenientes de ambos metodos.

#### 4.ETAPAS BASICAS DEL METODO.

Como en cualquier situación ingenieril la etapa inicial consiste en la elección del modelo matemático que mejor se ajuste a las características de nuestro problema y a su consideración desde el punto de vista de las posibilidades del método. En caso afirmativo los pasos a seguir son semejantes a los utilizados en el M.E.F. , es decir:

1. Se subdivide el dominio en las subregiones que se estimen pertinentes para recoger sus particularidades , bien de tipo heterogeneidad , bien de tipo geométrico .
2. Se procede a discretizar los contornos de cada subregión utilizando el concepto de 'elemento', es decir , se decide el

grado de interpolación con que se va a suponer que evolucionan las variables de campo en un trozo de contorno. Es usual admitir para este último el mismo tipo de variación, elemento isoparamétrico, aunque ello no es forzosamente necesario.

3. Para conseguir el grado de interpolación prescrito se definen dentro de cada elemento el número de nodos precisos. Conviene

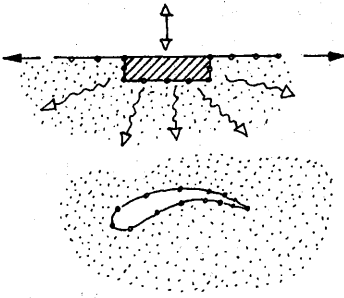


FIGURA 6

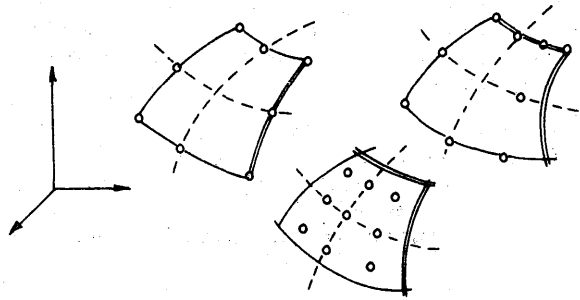


FIGURA 7

indicar que estos nodos no tienen ningún pie forzado, pudiendo situarse donde convenga (fig. 7). En general se suele trabajar con elementos compatibles, en el sentido que elementos vecinos comparten nodos en sus vértices o aristas; ello tiene la ventaja de reducir el número de ecuaciones a resolver, pero presenta complicaciones en los casos de discontinuidades, interfaces o singularidades donde es más conveniente dotar al modelo de más libertad de adaptación (fig. 8). Algunos autores prefieren esta

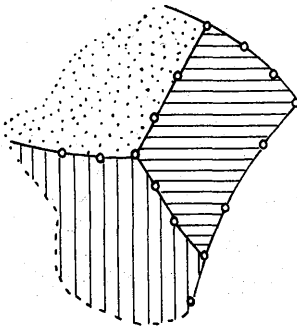


FIGURA 8

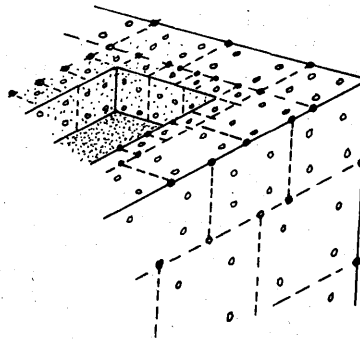


FIGURA 9

forma de trabajo, especialmente en problemas tridimensionales, donde con ello se permite una extraordinaria capacidad de adaptación a las peculiaridades del problema (fig. 9).

4. Para cada nodo de cada elemento se calculan unos factores de influencia  $a$  y  $b$ , que recogen el efecto recíproco de situar cargas puntuales en cada uno de ellos. En esta etapa se presentan problemas computacionales de importacia, debido a la necesidad de calcular integrales singulares con precisión y rapidez. Usualmente estas cargas unitarias se sitúan en los nodos previamente definidos. Cabe pensar, sin embargo, que en ciertos problemas sea más conveniente definir nuevos nodos que sirvan de apoyo a la aplicación de las citadas cargas puntuales; ello es precisamente lo que se hace en los llamados métodos indirectos, donde, incluso, aquellos están situados fuera del dominio en estudio.

5. Las variables naturales y esenciales en el contorno se recogen respectivamente en dos vectores que llamaremos  $p$  y  $q$ , y los factores calculados anteriormente se van almacenando en las correspondientes matrices  $A$  y  $B$  que multiplican a los precitados vectores. Se forma así un sistema del tipo

$$A \cdot p = B \cdot q \quad \dots (1)$$

donde en  $p$  y  $q$  se almacenan tanto datos como incógnitas.

5. Una vez formadas las matrices  $A$  y  $B$  (o según es más rápido, de forma simultánea) se establecen las condiciones de contorno del problema, imponiendo los valores conocidos de las variables de campo en los diferentes trozos. Con ello se reduce el problema a una expresión familiar del tipo:

$$K \cdot x = F \quad \dots (2)$$

es decir, a un sistema de ecuaciones donde  $x$  recoge todas las incógnitas en el contorno y  $F$  productos de coeficientes de las matrices  $A$  y  $B$  por los correspondientes datos

6. La resolución del sistema (2) permite obtener toda la información en el contorno, lo que finaliza el problema a menos que se deseen obtener resultados en puntos internos, en cuyo caso es precisa una etapa adicional que, recoge como subetapas, la formación de nuevas matrices  $A$  y  $B$  (un juego para cada punto interior) y su producto por los valores de contorno, según se vera más adelante. Precisamente en este proceso de cálculo de nuevas matrices se invierte un tiempo importante que, caso de que el número de puntos internos sea elevado, contrarresta las ventajas del M.E.C.

## 5. LA SOLUCION FUNDAMENTAL.

Como es sabido, la resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales se realiza por los métodos tradicionales de separación de variables, métodos variacionales y funciones de Green.



En este último la solución se consigue en forma puntual mediante una expresión del tipo:

$$u(P) = \int_{\Omega} G(P,Q) F(Q) da(Q). \quad \dots(3)$$

donde  $P$  es el punto donde interesa el valor y  $Q$  es el punto genérico que describe el dominio de integración.

Una función de Green recopila todas las condiciones del problema: forma del dominio, condiciones de contorno, características de la 'carga'  $F$ , etc. por lo que su construcción acarrea el mismo trabajo que la resolución de un problema real. En páginas posteriores veremos como se sortea esta dificultad; ahora nos fijaremos en un caso especial correspondiente a la solución del problema cuando se encuentra definido en un dominio homogéneo, isótropo e infinito y sometido a la acción de una carga puntual.

La correspondiente solución  $G(P,Q)$  se interpreta ahora como la respuesta en el punto  $P$  debida a una carga unidad situada en  $Q$ .

Es lo que en Matemáticas se denomina una solución fundamental del problema. En capítulos siguientes veremos como tomar ventaja de las características de delta de Dirac que tiene la solución fundamental, pero ahora conviene notar que en el caso  $P = Q$  se va a producir una situación singular que conllevará ciertas dificultades de tipo computacional.

Como se ve, el M.E.C. arranca de bases distintas al M.E.F., que está fundamentado en los métodos variacionales y las semejanzas se presentan en el tratamiento de las integrales globales mediante suma de integrales en dominios locales o elementos.

## CAPITULO II

### DESCRIPCION DEL CONTENIDO DEL MANUAL

En este capítulo se va a establecer la formulación del problema que será utilizado para describir el método. Se ha escogido como ejemplo la teoría del potencial elemental, lo que permitirá hacerse una idea rápida de las posibilidades y limitaciones del M.E.C. y sugerir nuevas aproximaciones a otros casos.

Se incluye también una breve discusión recordatoria del fundamento de los métodos proyectivos, con objeto de que sirva de comparación y fondo al desarrollo que luego haremos del M.E.C.

Finalmente se incluye una breve descripción del contenido de cada capítulo del libro.

#### 1. PROBLEMAS DE POTENCIAL

En el resto del trabajo, la base de la discusión se va a organizar sobre problemas controlados por las ecuaciones de Laplace

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = 0 \quad \dots (1)$$

o Poisson

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = -f \quad \dots (2)$$

donde  $u$  es la variable esencial del campo y  $f$  una distribución conocida de cargas.

Las ecuaciones (1) y (2) aparecen en multitud de problemas de la física y han sido ampliamente estudiadas desde un punto de vista matemático.

A pesar de ello, puede considerarse que la resolución de situaciones con geometrías arbitrarias y condiciones de tipo general en el contorno presenta todavía interés desde un punto de vista computacional.

Como es sabido, para que el problema quede bien planteado, las ecuaciones de campo deben ser completadas con la especificación de condiciones en el contorno del dominio. Esas condiciones suelen ser de alguno de los tipos siguientes:

#### 1. Condición de tipo Dirichlet:

Consiste en fijar el valor de la función  $u$  en el contorno; esto es

$$u(x) = u_0(x)$$

estando contenido el punto  $x$  en el contorno.

#### 2. Condición de tipo Neumann:

Consiste en fijar el valor de la derivada de la función respecto a la normal al contorno, en éste; así pues

$$q(x) = [du(x)/dn]_0 = q_0(x)$$

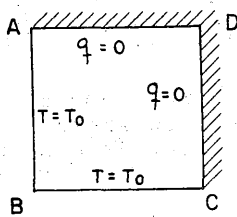
con  $x$  en el contorno.

#### 3. Condiciones mixtas:

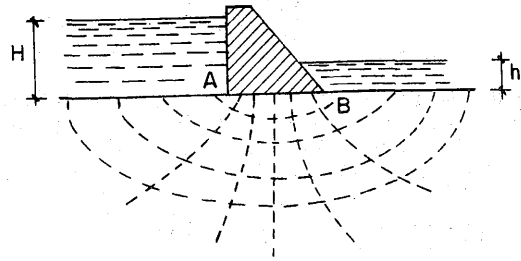
Son una combinación de las dos anteriores en diferentes trozos del contorno.

Como puede observarse se trata de una situación que es familiar al ingeniero acostumbrado a trabajar en elasticidad, donde  $u$  tiene el significado de vectores de desplazamientos y  $q$  el de vector tensión, siendo ambas variables duales en el contorno, de tal manera que las condiciones se excluyen mutuamente: cuando  $u$  es dato  $q$  es incógnita y viceversa.

En resumen, y como ejemplo, en la figura 1 se puede observar algunos casos familiares de lo que acabamos de ver.



(a)

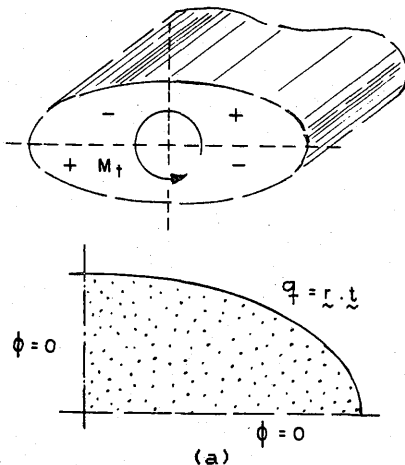


(b)

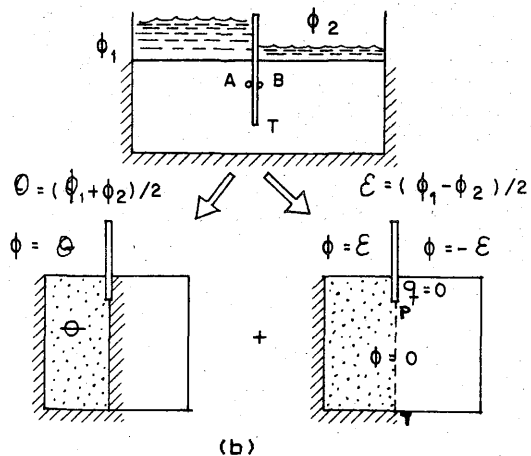
FIGURA 1

El problema 1.a corresponde a la situación estacionaria en un caso conductivo de propagación de calor. Obviamente la variable básica es aquí la temperatura, mientras que su dual es el flujo. Aparentemente la temperatura se mantiene constante en los bordes AB y BC, mientras que CD y DA son paredes adiabáticas en las que el flujo de calor es nulo.

Igualmente familiar es el caso 1.b descriptivo de la situación que se establece al plantear la filtración bajo una pared impermeable, en un medio poroso que, aguas arriba, sostiene una altura piezométrica H y aguas abajo alcanza h. En este caso aparecen dos puntos críticos, A y B, en los que se pasa bruscamente de una condición de tipo Dirichlet a otra de tipo Neumann, lo que va a acarrear la aparición de valores infinitos del flujo y el planteamiento de un interesante problema numérico.



(a)



(b)

FIGURA 2

En algunas situaciones, las condiciones de simetría o

antisimetría van a permitir establecer un planteamiento del tipo mixto, lo que, como se verá mas adelante, es conveniente desde el punto de vista del condicionamiento del sistema de ecuaciones a resolver. En la figura 2a. se observa cómo se puede transformar un problema de Dirichlet que aparece al estudiar la torsión de un prisma elíptico, en un problema mixto aprovechando la simetría de la sección y la antisimetría de la sollicitación. De la misma forma 2b. representa la filtración a través de una tablestaca vertical. Puntos tales como el A y el B tienen obviamente potenciales distintos, pero si la tablestaca se considera de espesor nulo, ambos son inseparables. La descomposición del caso en un problema simétrico, donde la solución inmediata es el potencial constante, y un problema antisimétrico que permite establecer condiciones de potencial nulo en el eje TP, hace accesible el cálculo del problema. De nuevo aparecerán en T valores infinitos del flujo, que exigirán un tratamiento especial.

En los ejemplos anteriores se ha admitido implícitamente que el medio era homogéneo e isotrópico. En los casos de heterogeneidad a

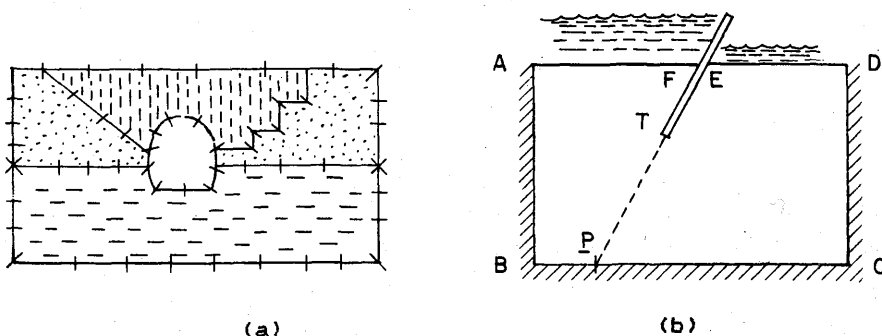


FIGURA 3

trozos, figura 3, es precisa una zonificación dentro de cada cual es aplicable una ecuación con propiedades de campo específicas. Además de las condiciones en el contorno exterior es preciso añadir ahora la compatibilidad de potencial y flujo en las interfases. La zonificación, como artificio, permite igualmente resolver situaciones asimétricas, como la de la figura 3b. mediante la introducción de una interfase ficticia.

Ademas de las tres condiciones clásicas aparecen a veces situaciones en que los valores de la variable esencial están combinados con los de la natural en el contorno. Por ejemplo:

#### 4. Condición de Robin ( o Newton ):

Consiste en el establecimiento de un relacion lineal

$$a.u(x) + b.q(x) = c$$

con  $a$  ,  $b$  y  $c$  constantes y  $x$  en el contorno.

##### 5. Derivada oblicua :

Refleja una relacion entre las derivadas normal y tangencial de la variable de campo a lo largo del contorno.

$$a \cdot q(x) + b \cdot [du(x)/dt] = c.$$

con  $a$  ,  $b$  y  $c$  constantes ,  $x$  en el contorno y  $t$  la direccion tangente al contorno en el punto  $x$ .

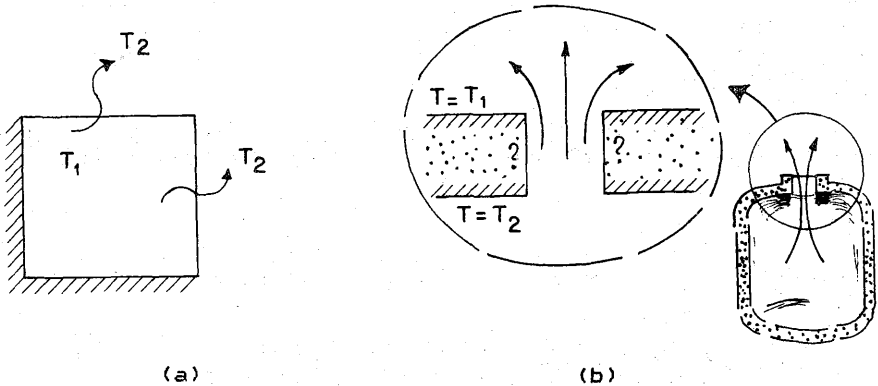


FIGURA 4

La figura 4 recoge algunos ejemplos de las condiciones anteriores. La 4a. representa un caso de conduccion con conveccion mientras que la 4b. aparece al analizar la evaporacion de un criogeno [43 ].

## 2. METODOS PROYECTIVOS.

Las ecuaciones 1 y 2 responden a una estructura de la forma

$$A u = f \quad \dots (3)$$

donde  $A$  es el operador laplaciano cambiado de signo .

La ecuación 3 representa una situación de equilibrio a nivel local que puede ser transformada en otra global mediante la conocida técnica de trabajos virtuales. Es decir , se utiliza una familia de funciones

$$v(i) , \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad \dots (4)$$

sobre cuyas características hablaremos mas adelante, para formar

productos escalares del tipo

$$\{Au, v(i)\} = \{f, v(i)\}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad \dots (5)$$

Si el operador A es simétrico puede demostrarse que el primer miembro se descompone en una forma bilineal  $a[u, v(i)]$  definida sobre el dominio y otra  $b[u, v(i)]$  definida sobre el contorno, con lo que es posible escribir

$$a[u, v(i)] + b[u, v(i)] = \{f, v(i)\}, \quad i=1, 2, 3, \dots \quad \dots (6)$$

(índice repetido indica suma)

La esencia de los métodos proyectivos radica en aproximar en este momento el valor de la variable de campo u mediante una expresión

$$u = \sum c(j) w(j), \quad i, j=1, 2, 3, \dots \quad \dots (7)$$

donde  $w(j)$  es una familia de funciones semejantes (y posiblemente distintas a  $v(j)$ ) y  $c(j)$  constantes a determinar.

La sustitución de (7) en (6) conduce a

$$a[v(i), w(j)] \cdot c(j) + b[v(i), w(j)] \cdot c(j) = \{f, v(i)\} \quad \dots (8)$$

es decir un sistema de ecuaciones de la forma

$$k(i, j) \cdot c(j) = f(i) \quad \dots (9)$$

donde se han hecho las simplificaciones de notación que se deducen en forma obvia al comparar (8) y (9).

El método citado se atribuye a los matemáticos rusos Bubnov y Galerkin, y la idea de la aproximación (7) al ingeniero alemán Ritz. Si las familias de funciones  $v$  y  $w$  coinciden se habla del método de Rayleigh - Ritz en honor del famoso 'filósofo de la naturaleza' inglés.

Para el analista de estructuras está clara la motivación energética subyacente en todo el procedimiento anterior. Sin embargo, para tener una idea más geométrica del significado del proceso conviene hacer una aproximación desde el punto de vista del método de los mínimos cuadrados. Para ello se define el error cometido por la aproximación de Ritz  $U$ , mediante

$$e = u - U \quad \dots (10)$$

y se busca hacer su cuadrado mínimo respecto a los parámetros  $c(i)$ . Así pues

$$e = \{u - U, u - U\} = \{u, u\} - 2\{u, U\} + \{U, U\} =$$
$$= \{u, u\} - 2 \cdot c(i) \cdot \{u, v(i)\} + c(i) \cdot c(j) \cdot \{v(i), v(j)\} \quad \dots (11)$$

Si derivamos respecto a  $c(i)$  e igualamos a cero el resultado se

obtiene

$$[ \text{ de } /dc(i) ] = 0 = -2\{u, v(i)\} + 2.c(j). \{v(i), v(j)\}$$

y por tanto

$$\{v(i), v(j)\} c(j) = \{u, v(i)\} \quad \dots (12)$$

Obsérvese que (12) es del tipo de la ecuación (8), pero ahora desconocemos el valor del producto escalar del segundo miembro debido a que  $u$  es, justamente, la variable incógnita.

Para salvar esta situación se recurre a una redefinición del producto escalar, en la que se hace intervenir el propio operador  $A$  del problema en estudio, es decir, se hace

$$\langle u, v(i) \rangle = \langle Au, v(i) \rangle \quad \dots (13)$$

A partir de ahora, y en virtud de la definición del problema, se puede escribir la ecuación (12) como

$$\langle v(i), v(j) \rangle c(j) = \langle Au, v(i) \rangle = \langle f, v(i) \rangle \quad \dots (14)$$

que, si se tiene en cuenta el carácter simétrico de  $A$ , se puede reducir inmediatamente a la forma de la ecuación (7).

Evidentemente el proceso anterior requiere una comprobación de la equivalencia de las normas inducidas por los productos escalares  $\{ \}$  y  $\langle \rangle$ , lo cual se puede demostrar con algunas condiciones. (Ver Mikhlin).

Para dar un sentido inmediato al producto escalar, (que se denomina 'energético' debido a la relación con la energía elástica cuando  $A$  es el operador de Navier), se puede recurrir a la idea de 'residuos ponderados'.

La aproximación de Ritz

$$U \sim u$$

implica

$$Au \sim AU$$

y, por tanto, la existencia de un error en la ecuación de campo

$$E = Au - AU \quad \dots (15)$$

Si la familia  $v(i)$  forma una base en la que puede ser expresado cualquier vector del tipo  $Au$ , esta claro que la condición para que  $E$  sea nulo es

$$\langle E, v(i) \rangle = 0 \quad \text{para todo } v(i). \quad \dots (16)$$

Si nos limitamos a un número finito de vectores, estaremos



'ponderando' el error en el subespacio finito engendrado por aquéllos. Usando la ecuación de campo, así como (15) y (16) es fácil ver que se reproducen las ecuaciones de Bubnov - Galerkin.

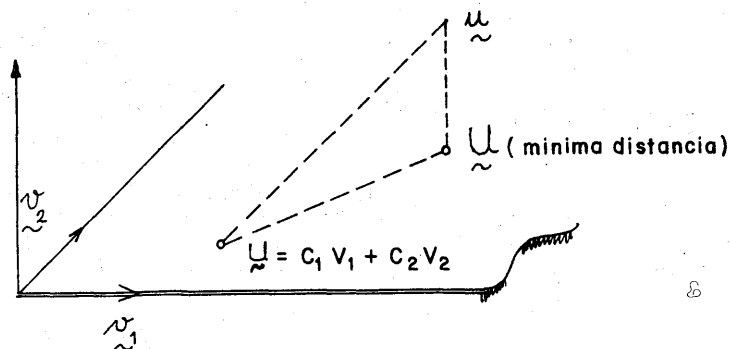


FIGURA 5

En la figura 5 se ha representado un diagrama ilustrativo de la idea de aproximación subyacente. Si la solución real, por ejemplo se encuentra en un espacio tridimensional, la aproximación desde un espacio bidimensional corresponde a la determinación de la distancia mínima entre aquélla y el subespacio bidimensional engendrado por las funciones de aproximación.

El método de los elementos finitos se obtiene ahora sin más que exigir a las funciones  $V$ , condiciones adicionales para que la 'matriz de rigidez'  $K$  corresponda a un sistema de ecuaciones de cómoda resolución. En particular, si se usan las autofunciones del problema, se obtiene una matriz diagonal. En caso contrario se buscan funciones definidas localmente, los spline polinómicos que provocan una matriz en banda. Esta, además es simétrica debido a las características de la aproximación y del operador, por lo que las ventajas computacionales son grandes.

El M.E.C. por su parte, utiliza la misma filosofía en las funciones aproximantes  $V(j)$ , pero ahora las funciones de ponderación son distintas y, además están definidas globalmente, con lo que las matrices que se obtienen son asimétricas y llenas aunque de mucho menor tamaño.

Conviene también indicar que la fórmula de representación del M.E.C. es puntual, por lo que el llamado método indirecto es realmente un método de colocación. Se han realizado también intentos de formulación tipo Galerkin ponderando la ecuación completa, con lo que se complica el trabajo de integración. Nosotros nos limitaremos al método habitual.

### 3. EL METODO DIRECTO.

En los capítulos siguientes vamos a desarrollar el M.E.C. directo, esto es, aquél en el que se trabaja con las cantidades de interés propias del problema sin recurrir a distribuciones auxiliares.

Para ello, en el capítulo 3, se van a introducir algunas relaciones clásicas de la teoría del potencial. Como se ha indicado anteriormente es posible entroncar el método con los procedimientos de aproximación habituales; pero no es menos cierto que ello puede oscurecer algunas particularidades de interés.

Se ha preferido escoger una vía analítica entroncada en las fórmulas de Green.

Con ello será inmediata la identificación de los métodos indirectos, y la obtención de la fórmula básica del M.E.C. El capítulo 4 indicará de forma detallada el desarrollo necesario para el tratamiento de problemas en dominios bidimensionales. La presentación se hará utilizando elementos de tipo lineal y con la solución correspondiente al espacio completo. Para aclarar las dudas que pudieran surgir se acompaña un Apéndice en el que se recoge un pequeño programa en lenguaje Basic preparado para el microordenador IBM Personal Computer.

Como se ha dicho, el método es especialmente atractivo en los casos tridimensionales, y por ello el capítulo 5 se dedica a la implementación correspondiente. Como se verá, debido a las características de la solución fundamental, el trabajo es muy sencillo y, en el tratamiento de las condiciones en el infinito, incluso superior al caso plano. Aquí la interpolación es con elementos constantes para evitar que ciertas complicaciones en los vértices, del tipo resuelto en el capítulo 4, oscurezcan las características del M.E.C.

El capítulo 6, por su parte, recoge un caso tridimensional particular: el de los cuerpos con simetría de revolución. En estas condiciones se recae en elementos del tipo plano, y tan solo se ha incluido para facilitar la presentación de una condición de contorno del tipo derivada oblicua y ver con qué facilidad de incorpora al proceso general.

El capítulo 7 recoge finalmente algunas aplicaciones misceláneas y deja planteados algunos problemas que, el lector interesado deberá estudiar en monografías o artículos más especializados.

## CAPITULO III

### ALGUNAS RELACIONES CLASICAS

En las secciones que siguen vamos a recordar los conceptos clásicos de la teoría del potencial y las ecuaciones básicas del M.E.C. La mayoría de las aplicaciones correspondientes a problemas de Laplace están relacionadas con campos eléctricos o magnéticos, pero la laplaciana gobierna también problemas como la torsión de Saint Venant, el flujo irrotacional, las filtraciones a través de medios porosos, la masa añadida en problemas de interacción fluido estructura, etc., lo que indica la importancia del tratamiento numérico del operador laplaciano.

Las referencias clásicas para lo que sigue incluyen los libros de Courant y Hilbert, Jeffreys y Jeffreys, Carslaw y Jaeger, Jaswon y Symm, etc.

#### EL TEOREMA DE LA DIVERGENCIA Y LAS FORMULAS DE GREEN.

Como es bien sabido, el teorema de la divergencia es un artificio utilísimo al relacionar integrales de volumen y superficie. Un tratamiento adecuado del mismo puede verse en el capítulo 4 de la obra de Kellogg.

El teorema establece que el flujo del vector  $\vec{F}$  a través de la superficie cerrada es igual a la integral de la divergencia en el dominio encerrado por aquella.

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} = \int_{\partial \Omega} \vec{F} \cdot \vec{n} \quad \dots (1)$$

donde se ha prescindido de los diferenciales de área y volumen para simplificar la escritura,  $\vec{F}$  es un campo vectorial y  $\vec{n}$  es la normal exterior a  $S$ .

Los campos para los que

$$\operatorname{div} \vec{F} = 0 \quad \dots (2)$$

se llaman solenoidales ; como consecuencia de (1) en ellos , el flujo a través de cualquier superficie cerrada es nulo . En particular , si  $\vec{F}$  deriva de un rotacional , tendremos

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \operatorname{rot} \vec{Q} \\ \operatorname{div} \vec{F} &= \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{Q} = 0 \end{aligned} \quad \dots (3)$$

La existencia de un campo irrotacional implica

$$\operatorname{rot} \vec{F} = 0 \quad \dots (4)$$

mientras que se llama laminares a los campos que derivan de un potencial

$$\vec{F} = \operatorname{grad} U \quad \dots (5)$$

En particular , cualquier campo laminar es irrotacional , pues

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} U = 0 \quad \dots (6)$$

Las formulas de Green se obtienen al aplicar el teorema de la divergencia a un campo laminar compuesto del tipo

$$\vec{F} = U \operatorname{grad} V \quad \dots (7)$$

donde U y V son funciones  $C^2$  . Usando la notacion de Hamilton

$$\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \nabla (U \cdot \nabla V) = \nabla U \cdot \nabla V + U \nabla^2 V \quad \dots (8)$$

donde

$$\nabla^2 = \operatorname{div} \operatorname{grad} \quad \dots (9)$$

es el operador laplaciano.

Substituyendo la ecuacion (8) en la (1) se obtiene

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} = \int_{\Omega} \nabla U \cdot \nabla V + U \nabla^2 V = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot \vec{n} = \int_{\Gamma} U \nabla V \cdot \vec{n} = \int_{\Gamma} U (dV/dn) \quad \dots (10)$$

y , reordenando ,

$$\int_{\Omega} \nabla U \cdot \nabla V = \int_{\Gamma} U (dV/dn) - \int_{\Omega} U \nabla^2 V \quad \dots (11)$$

que es la primera formula de Green. La segunda se obtiene observando la simetría del primer miembro , intercambiando U y V y restando , lo que produce

$$\int_{\Omega} U \nabla^2 V - V \nabla^2 U = \int_{\Gamma} U (dV/dn) - V (dU/dn) \quad \dots (12)$$

Como es bien sabido , toda función para la cual

$$\nabla^2 U = 0 \quad \dots (13)$$

se llama armónica.

Si tanto U como V son armónicas , (12) se reduce a

$$\int_{\Gamma} U (dV/dn) - V (dU/dn) = 0 \quad \dots (14)$$

que es la base para los llamados métodos de Trefftz .

## 2. POTENCIALES NEWTONIANOS PUNTUALES. TEOREMA DE GAUSS

Los campos electrostáticos y gravitacionales siguen la ley

$$\vec{F} = g [(m m') / (r - r')^2] [(\vec{r} - \vec{r}') / (r - r')] \quad \dots (15)$$

que sirve para definir la intensidad

$$\vec{E} = \lim (\vec{F}/m') = g [m / (\vec{r} - \vec{r}')^2] [(\vec{r} - \vec{r}') / (r - r')] \quad \dots (16)$$

Se supone que  $m'$  no interacciona mas que para recibir el campo , de modo que m es la masa activa en el punto Q

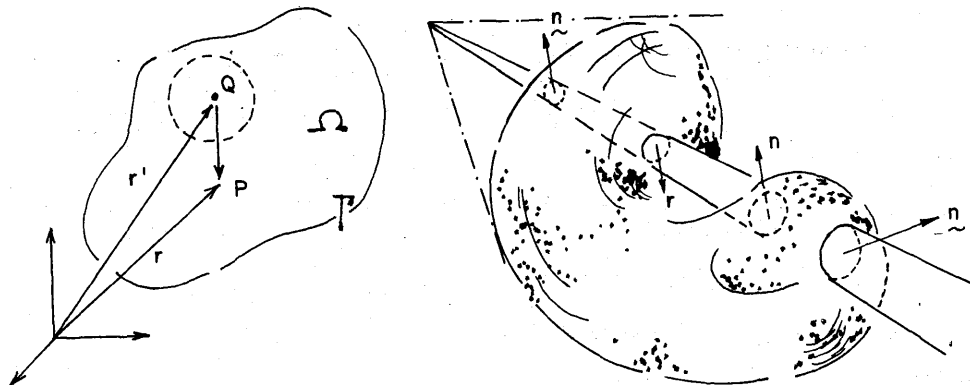


FIGURA 1

representado por el vector  $\vec{r}'$  y el campo  $\vec{E}$  se mide en el punto P representado por el vector  $\vec{r}$ . El cociente  $(\vec{r} - \vec{r}') / (r - r')$  simboliza un vector unitario de Q a P , mientras que g es una constante característica del medio.

El análisis del flujo de  $E$  a través de una superficie (fig.1) produce la conocida fórmula de Gauss. Si la superficie rodea a  $Q$

$$\int_{\Gamma} \vec{E} \cdot \vec{n} = qm \int_{\Gamma} \{[(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{n}] / (r - r')^3\} \quad \dots (17)$$

pero el producto escalar  $[(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{n}] / (r - r')$  multiplicado por el elemento de superficie es la proyección de ésta en un plano ortogonal a  $\vec{r} - \vec{r}'$ , y el cociente con  $(r - r')^2$  es el ángulo sólido elemental, de modo que, si la superficie es cerrada

$$\int_{\Gamma} d\theta = 4\pi \quad \dots (18)$$

$$\int_{\Gamma} \vec{E} \cdot \vec{n} = 4\pi qm \quad \dots (19)$$

Si el foco está fuera de la superficie el ángulo es nulo debido a los cambios de signo de la normal (fig.1) en ambos lados de la línea de contacto en el cono de influencia.

$$\int_{\Gamma} \vec{E} \cdot \vec{n} = 0 \quad \dots (20)$$

Por otro lado, si el foco está en la superficie y en un punto  $Q$  no singular se cumple

$$\int_{\Gamma} d\theta = 2\pi ; \quad \int_{\Gamma} \vec{E} \cdot \vec{n} = 2\pi qm \quad \dots (21)$$

Las propiedades anteriores de la integral de Gauss

$$I = \int_{\Gamma} [(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{n}] / (r - r')^3 \quad \dots (22)$$

son características de las distribuciones de carga y se pueden recopilar en el siguiente esquema

$I=0$ .....( $Q$  exterior)

$I=2\pi$ .....( $Q$  en el contorno)

$I=4\pi$ .....( $Q$  interior)

Conviene observar que debido a las ecuaciones (1) y (20)

$$\text{div } \vec{E} = 0 \quad \dots (23)$$

es decir el campo  $\vec{E}$  es solenoidal.

Los campos newtonianos son laminares ( irrotacionales por tanto) y la función

$$V = m / (r - r') \quad \dots (24)$$

juega en ellos el papel de potencial , con lo que

$$\vec{E} = - g \text{ grad } V \quad \dots (25)$$

Mediante la ecuación (23) se obtiene

$$\text{div } \vec{E} = - g \nabla^2 V = 0 \quad \dots (26)$$

Así pues , la función potencial es armónica.

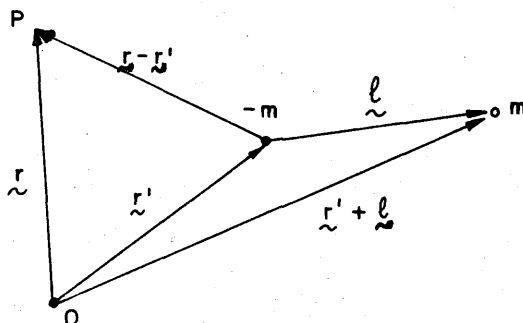


FIGURA 2.

Otro campo de interés es el creado por dos cargas iguales de signo diferente y separadas una pequeña distancia  $l$ . (fig.2) Usando la linealidad del operador la nueva función potencial se puede escribir como

$$V(r) = m \{ [1/(r - r' - l)] - [1/(r - r')] \} \quad \dots (27)$$

Teniendo en cuenta

$$1/(r - r' - l) = [1/(r - r')] \{ 1 + [(r - r') \cdot l] / (r - r')^2 + \dots \} \quad \dots (28)$$

se obtiene

$$V(r) = [m \cdot l / (r - r')^3] \cdot (r - r') \quad \dots (29)$$

en el limite cuando  $l$  tiende a cero y  $m$  tiende a  $p/l$

$$\lim m l = p \quad \dots (30)$$

y la ecuación (27) se puede escribir como

$$V(r) = \frac{p \cdot (\underline{r} - \underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3}$$

Como se observa este potencial depende no sólo de la magnitud sino también de la dirección del dipolo, y es positivo en su extremo positivo.

### 3. POTENCIALES DE CAPA SIMPLE, CAPA DOBLE Y VOLUMETRICO

La generalización inmediata de los potenciales puntuales del apartado anterior son las distribuciones de carga

Volumetrica :  $\rho(Q)$

Superficial :

Capa simple  $\sigma(Q)$

Capa doble ( dipolos )  $\mathcal{K}(Q)$

$\sigma$  se define como el límite de la distribución  $\rho$  cuando una dimensión  $t$  del volumen tiende a cero ( produciendo una superficie ) y  $\rho$  tiende a infinito, de modo que

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ \rho \rightarrow \infty}} (\rho \, d\tau) = \sigma \, dA \quad \dots (31)$$

$\mathcal{K}$  se obtiene como el límite de una capa doble construida con dipolos dirigidos perpendicularmente a la superficie.

Si  $\sigma$  tiende a infinito cuando la distancia de ambas capas tiende a cero, el momento del dipolo elemental tiene por módulo

$$\mathcal{K} = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ \sigma \rightarrow \infty}} (\sigma \, t) \quad \dots (32)$$

y

$$p = \mathcal{K} \cdot n \quad \dots (33)$$

Puesto que

$$\text{grad}[1/|\underline{r} - \underline{r}'|] = - [(\underline{r} - \underline{r}')/|\underline{r} - \underline{r}'|^3] \quad \dots (34)$$

las correspondientes definiciones son

Potencial volumetrico:



$$V_v = \int_{\Omega} [\rho(Q)/(r-r')] d\Omega(Q) \quad \dots (35)$$

Potencial de capa simple:

$$V_s = \int_{\Gamma} [\sigma(Q)/(r-r')] d\Gamma(Q) \quad \dots (36)$$

Potencial de capa doble:

$$W = - \int_{\Gamma} \mathcal{K}(Q) \vec{n} \cdot \text{grad}[1/(r-r')] d\Gamma(Q) \quad \dots (37)$$

o también

$$W = - \int_{\Gamma} \mathcal{K}(Q) d/dn[1/(r-r')] d\Gamma(Q) \quad \dots (38)$$

Esta última fórmula puede transformarse utilizando la eq. (22) y en el caso en que  $\mathcal{K} = \text{constante}$ , en la interesante expresión

$$W = \mathcal{K} \int_{\Gamma} [(\vec{r}-\vec{r}') \cdot \vec{n} d\Gamma] / (r-r')^3 = \mathcal{K} \Omega \quad (\text{constante}) \quad \dots (39)$$

La generalización del teorema de Gauss para el caso del potencial volumétrico se escribe como

$$\int_{\Gamma} [\vec{E} \cdot \vec{n}] d\Gamma = 4\pi g \int_{\Omega} \rho d\Omega \quad \dots (40)$$

y aplicando la ecuación (25)

$$-g \int_{\Gamma} (\text{grad} V \cdot \vec{n}) d\Gamma = 4\pi g \int_{\Omega} \rho d\Omega \quad \dots (41)$$

que tras la sustitución de (1) en el primer miembro conduce a

$$- \int_{\Omega} (\text{div grad } V + 4\pi \rho) d\Omega = 0 \quad \dots (42)$$

Como la relación es independiente del dominio, se obtiene así la ecuación de Poisson

$$-\text{lap } V = 4\pi \rho \quad \dots (43)$$

una de cuyas soluciones es la ecuación (35).

Existen dos ejemplos del mayor interés que justifican la manejabilidad de (35) y (36) cuando  $\vec{r} = \vec{r}'$ .

La primera se obtiene al estudiar el potencial generado por una

distribución esférica constante, donde, por simetría

$$\text{lap } V = \{d/dr [r^2 \cdot dV/dr]\} / r^2 \quad \dots (44)$$

En este caso la ecuación (44) se puede integrar fácilmente, obteniéndose

$$V(r) = 2\pi \rho R^2 - (2\pi/3) \rho r^2$$

$$dV/dr = -(4\pi/3) \rho r \quad \dots (45)$$

donde R es el radio de la esfera.

Como puede observarse tanto V como dV/dr son finitas y tienden a cero con el radio de la esfera. Esto sugiere la interpretación

$$\int_{-\infty}^{\infty} = \int_{-\infty}^{\infty} + \int_{\mathcal{E}} \quad \dots (46)$$

donde  $\mathcal{E}$  es una esfera de radio  $\mathcal{E}$  alrededor del punto Q. La primera integral del segundo miembro tiene un integrando continuo; por otro lado, la segunda integral está acotada por la que se obtendría sustituyendo  $\rho$  por su valor máximo en  $\mathcal{E}$ , y en este caso de acuerdo con la ecuación (45), se obtendría un valor tendiendo a cero con  $\mathcal{E}$ . Por consiguiente, V y su primera derivada son finitas en los puntos interiores de una distribución volumétrica.

El segundo ejemplo útil es el potencial creado por una laja circular con una distribución superficial constante  $\sigma$ . Si medimos x según la normal a la laja

$$\text{lap } V = d^2 V/dx^2 \quad \dots (47)$$

tras cuya integración obtenemos

$$V = 2\pi\sigma [(x^2 + R^2)^{1/2} - x]$$

$$dV/dx = 2\pi\sigma \{ [x/(x^2 + R^2)^{1/2}] - 1 \} \quad \dots (48)$$

que son nulas cuando  $R \rightarrow 0$ , lo que implica la validez de los resultados obtenidos mas arriba para el caso de potencial de capa simple.

#### 4. DISCONTINUIDADES DE LOS POTENCIALES SUPERFICIALES.

Cuando  $x \rightarrow 0$  la fórmula 48 conduce a

$$V(0) = 2 \pi \sigma R$$

$$(dV/dx)_0 = - 2 \pi \sigma \quad \dots (49)$$

Si, por consideraciones físicas, la distribución es simétrica, continua y la derivada no es nula, los resultados anteriores indican una discontinuidad de la derivada de la función.

Aplicando el teorema de Poisson a un cilindro de altura  $\varepsilon$  con bases paralelas a la laja, en el límite el flujo sería (ecuación 41)

$$- \int_{\Gamma_1} dV/dn_1 - \int_{\Gamma_2} dV/dn_2 = \lim 4 \pi \int_{\Gamma} \rho \varepsilon \quad \dots (50)$$

Como

$$\lim (\rho \varepsilon) = \sigma$$

$$ds_2 = ds_1 = ds$$

se obtiene

$$(dV/dn)_1 + (dV/dn)_2 = - 4 \pi \sigma \quad \dots (51)$$

que es, exactamente, el resultado previsto tras la ecuación (49) una vez que se suman las derivadas a ambos lados. (Obsérvese que la derivación se realiza respecto a direcciones opuestas).

El análisis anterior sugiere una fórmula para representar la derivada en cualquier punto exterior o interior. Se comienza excluyendo una pequeña escama de radio  $\varepsilon$  alrededor del punto en estudio. Cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $V \rightarrow 0$  (ecuación (49)), es decir, el potencial es continuo. Por otro lado, al situarse en puntos interiores es preciso añadir  $2 \pi \sigma$  a la contribución anterior, y restarla en puntos exteriores. Por lo tanto

$$(dV/dn)_i = 2 \pi \sigma + \int_{\Gamma} \sigma \cdot d/dn [1/(r-r')]$$

$$(dV/dn)_e = - 2 \pi \sigma + \int_{\Gamma} \sigma \cdot d/dn [1/(r-r')]$$

Estas relaciones fueron deducidas por Fredholm en 1900.

El mismo tipo de razonamiento puede utilizarse para el potencial de capa doble. La analogía de la ecuación (38) con el potencial de capa simple demuestra que  $W$  presenta una singularidad y que las correspondientes formulas de Fredholm son

$$\begin{aligned} W_i &= -2\pi\mathcal{K} - \int_P^r \mathcal{K} \cdot d / dn [1/(r-r')] \\ W_e &= 2\pi\mathcal{K} - \int_P^r \mathcal{K} \cdot d / dn [1/(r-r')] \end{aligned}$$

Debido a la antisimetría, la derivada de  $W$  tiene una tangente continua al cruzar la escama. La formula (53) se puede obtener tambien de modo directo a partir de la (39).

Para puntos exteriores  $(r - r') \cdot n$  es positivo y

$$W_e = 2\pi\mathcal{K} \quad \dots (53a)$$

mientras que para puntos interiores

$$W_i = -2\pi\mathcal{K} \quad \dots (53b)$$

Como ha podido observarse todo el desarrollo anterior tiene un marcado caracter heurístico. El lector interesado en un planteamiento riguroso debe recurrir, por ejemplo, al capítulo 6 de la obra de Kellogg [42].

## 5. FORMULAS DE GREEN. ECUACION EN EL CONTORNO.

El segundo teorema de Green produce una interesante fórmula cuando  $V=1/(r-r')$  e intentamos calcular  $U$  en  $P$ . Postulando la continuidad de la función, construyendo una esfera de radio  $\mathcal{E}$  alrededor de  $P$ , y, puesto que  $dV = 0$ , la ecuación 12 se puede escribir como

$$-\int_{\Omega-\mathcal{E}} \nabla^2 U = \int_{\Gamma \cup \partial\mathcal{E}} U (dV/dn) - V (dU/dn) \quad \dots (54)$$

tomando límites

$$\lim_{\mathcal{E} \rightarrow 0} - \int_{\partial\mathcal{E}} (dU/dn)/r = \lim_{\mathcal{E} \rightarrow 0} - \int_{\partial\mathcal{E}} dU/dr = 0$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial \mathcal{E}} U [d(1/r)/dn] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial \mathcal{E}} U/\epsilon = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial \mathcal{E}} U = 4\pi U(P)$$

por lo tanto

$$-\int_{\Omega} \nabla^2 U = \int_{\Gamma} U(dV/dn) - V (dU/dn) + 4\pi U(P) \quad \dots (55)$$

y, reordenando,

$$-4\pi U(P) = \int_{\Omega} \nabla^2 U/(r-r') + \int_{\Gamma} U d[1/(r-r')]/dn - \int_{\Gamma} [1/(r-r')] [dU/dn] \quad \dots (56)$$

Si se cumple que

$$U/4\pi = \mathcal{K}$$

$$(1/4\pi) (dU/dn) = \sigma$$

y el problema es tipo Poisson

$$-\nabla^2 U = 4\pi \rho$$

la ecuación 56 produce

$$U(P) = \int_{\Omega} \rho/(r-r') + \int_{\Gamma} \sigma/(r-r') + \int_{\Gamma} \mathcal{K} d[1/(r-r')]/dn \quad \dots (57)$$

Las ecuaciones 56 y 57 manifiestan el conocido resultado que toda función que cumpla las condiciones del segundo teorema de Green puede expresarse mediante la suma de un potencial de capa simple, un potencial de capa doble y otro volumétrico.

La primera integral de la ec. (36) es evidentemente cero cuando U es armónica.

También es interesante observar que el factor  $4\pi$  se convierte en  $2\pi$  cuando P se encuentra en una superficie lisa. La expresión final es

$$-c(P) U(P) = \int_{\Omega} \nabla^2 U/(r-r') - \int_{\Gamma} U d[1/(r-r')]/dn + \int_{\Gamma} [1/(r-r')] [dU/dn] \quad \dots (58)$$

## 6. CASO BIDIMENSIONAL

Las fórmulas anteriores se aplican igualmente al caso bidimensional, donde

$$c(P) = 0 \quad \text{si } P \in \Omega_e$$

$$c(P) = \eta \quad \text{si } P \in \partial\Omega$$

$$c(P) = 2\eta \quad \text{si } P \in \Omega_i$$

$$V = \ln(1/R)$$

y las formulas de Fredholm para este caso son

$$(dV/dn)_i = \eta \sigma + \int_{\Gamma} \sigma d\{\ln[1/(r-r')]\}/dn$$

$$(dV/dn)_e = -\eta \sigma + \int_{\Gamma} \sigma d\{\ln[1/(r-r')]\}/dn$$

$$W_i = -\eta \kappa - \int_{\Gamma} \kappa d\{\ln[1/(r-r')]\}/dn$$

$$W_e = \eta \kappa - \int_{\Gamma} \kappa d\{\ln[1/(r-r')]\}/dn \quad \dots (60)$$

mientras que la formula de Green es ahora

$$-c(P) U(P) = \int_{\Omega} \nabla^2 U \cdot \ln[1/(r-r')] + \int_{\Gamma} U \cdot d\{\ln[1/(r-r')]\}/dn - \int_{\Gamma} \{\ln[1/(r-r')]\} (dU/dn) \quad \dots (61)$$

donde  $c(P)$  representa el ángulo formado por las tangentes al contorno antes y después del punto en estudio.

## EJERCICIOS

1. Obtener el factor  $c(P)$  en la formula 58 por aplicación de un paso al limite  $P \rightarrow \partial\Omega$  en 57 para los casos

- contorno liso
- vertice de un ortoedro
- vertice de un tetraedro

2. Obtener el factor  $c(P)$  en la formula 61 por aplicación de un paso al limite  $P \rightarrow \Gamma$  en la fórmula de Green en el caso de una esquina de ángulo interior  $\alpha$ .

3. Por aplicación del método de las imágenes obtener una solución fundamental para el semiespacio plano tridimensional

4. Analizar las posibilidades de reducción del potencial volumétrico al contorno. Aplicación a casos particulares tales como fuentes distribuidas, concentradas en líneas, puntuales etc

5. Obtener una solución fundamental para el caso anisotrópico

$$k_x \frac{\partial \phi^2}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial \phi^2}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial \phi^2}{\partial z^2} = \delta(x - \tilde{x})$$

(Utilizar un cambio de coordenadas que incorpore las permeabilidades 'k' a las correspondientes variables).

## CAPITULO IV

### PROBLEMAS PLANOS

En este capítulo se va a presentar desde un nivel elemental los pasos necesarios para desarrollar el método de los elementos de contorno en problemas regidos por una ecuación de Laplace. Puede imaginarse, por ejemplo, que tratamos con la conducción de calor en régimen estacionario y en medios bidimensionales, en cuyo caso la variable esencial, el potencial  $\phi$ , tiene el significado de temperatura, mientras que la variable natural es el flujo de calor  $q$  a través de una determinada superficie. Tras el establecimiento de las nociones habituales de los métodos numéricos se pasará al cálculo de las matrices de influencia y la presentación de algunos ejemplos sencillos.

#### 1. DEFINICIONES Y NOTACION.

Según se indicó en los capítulos anteriores, el objetivo principal del método es la determinación de los valores que las variables de interés toman en el contorno. Por ello el primer concepto que conviene remarcar es que se va a proceder a una interpolación de aquellas tanto en los datos como en las incógnitas, con objeto de aproximar mediante un número finito de funciones 'ad hoc' su comportamiento.

Supongamos, para fijar ideas, el problema indicado en la figura 1. En los intervalos AB y DC se conoce el flujo y se desconoce el potencial, mientras que en el resto la situación es recíproca.

Con objeto de reducir las incógnitas a un número finito se decide limitar la búsqueda a los valores de las incógnitas en un número finito  $1, 2, \dots, n$  de puntos.

Además se supone que, tanto el potencial como el flujo, serán interpolados mediante funciones 'de forma'  $N(i)$ ,  $M(i)$ , que tomen valor unidad en cada uno de los puntos escogidos, o nodos, y se



anulen en el resto , de modo que en una interpolación del tipo

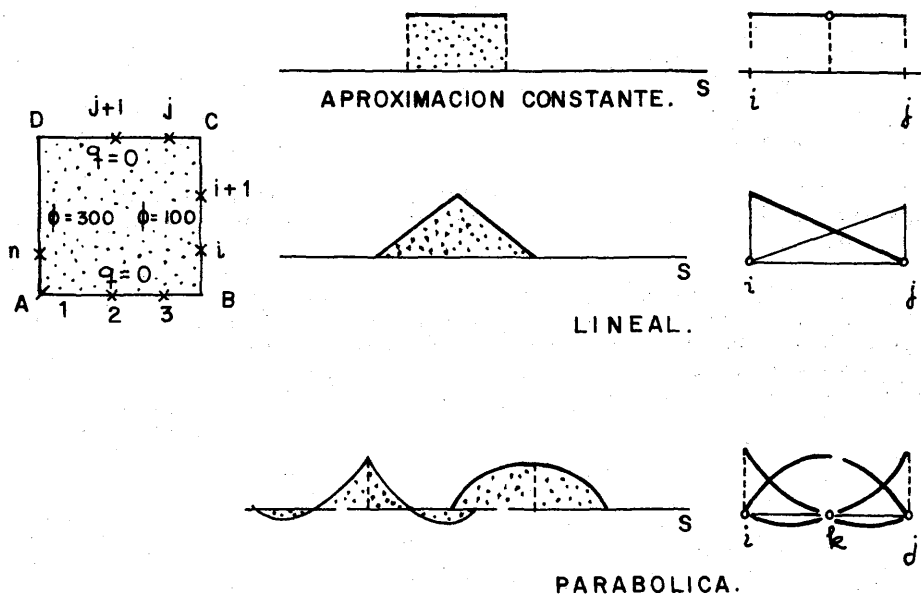


FIGURA 1.

$$\phi = a(i).N(i)$$

$$q = b(i).M(i)$$

$$i=1,2,\dots,n$$

... (1)

los  $a(i)$  sean , precisamente , los valores que  $\phi$  toma en el punto  $i$  y los  $b(i)$  los de  $q$  .

En la figura 1 se recogen aproximaciones de tipo lineal , constante , parabólico , etc. mediante polinomios que son cero en gran parte del dominio , lo que facilita la condición indicada anteriormente para dotar de sentido físico a los coeficientes .

Al igual que sucede con elementos finitos , puede verse que este tipo de interpolación engendra de forma natural el concepto de elemento , como aquella zona del contorno en la que se repite la forma de aproximación . Ello permite el tratamiento de las operaciones ( fundamentalmente integraciones ) en un sentido local , con lo que se consigue la repetitividad de los procesos , lo que es deseable para el tratamiento en computador .

Aparece igualmente la idea de representación geométrica del

contorno, en forma aproximada, mediante interpolación de las coordenadas entre los valores correspondientes a los puntos escogidos para definir las variables. Es decir

$$x = x(i) \cdot R(i)$$

$$y = y(i) \cdot R(i)$$

$$i=1,2,3,\dots,n \quad \dots (2)$$

donde  $R(i)$  son, de nuevo, funciones definidas localmente.

En principio  $M$ ,  $N$  y  $R$  son independientes, pero tradicionalmente se suelen hacer coincidir, lo que conduce a la idea de elementos isoparamétricos.

Así pues, la primera tarea del analista, consiste en la discretización, esto es, en la elección de aquéllos puntos del contorno que van a servir de guía en la interpolación de las variables esenciales y naturales, así como en la representación geométrica del propio contorno. (figura 2).

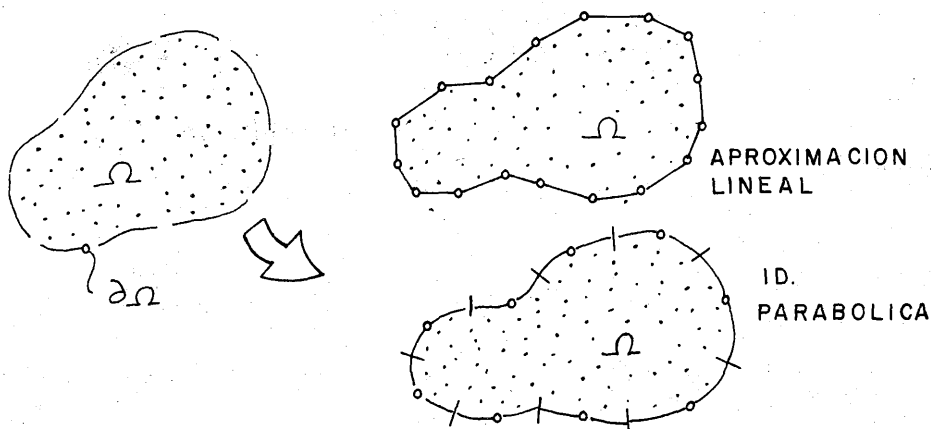


FIGURA 2

Tras las operaciones anteriores el objetivo se ha limitado a la determinación de los parámetros  $a(i)$  y  $b(i)$  que sean desconocidos tal como indiquen las condiciones de contorno.

En general habrá  $N$  incógnitas a calcular, para lo que se necesitan  $N$  ecuaciones independientes. En el MEC estas ecuaciones se obtienen a partir de las fórmulas de representación establecidas en el capítulo 3, lo cual puede interpretarse como el uso de funciones de ponderación, tal como sucede en cualquier método de Galerkin. En nuestro caso dos observaciones son de interés. En primer lugar la fórmula de representación da el valor en un punto, donde se coloca la solución fundamental,

por lo que no se trata de un método de Galerkin propiamente dicho. Además, el propio carácter de la solución fundamental implica que su extensión es global, en oposición al carácter local de las funciones de forma interpolantes. En el capítulo final se harán algunas consideraciones sobre esta dualidad.

Puesto que este capítulo va a ser centrado en el tratamiento de problemas planos, la fórmula de representación adecuada es la ecuación 61 del capítulo 3. Obsérvese que en ella el sumando correspondiente a la integral volumétrica del segundo miembro es conocido, pues, en virtud de la ecuación de partida

$$\int_{\Omega} \nabla^2 \phi \ln[1/(r-r')] = - \int_{\Omega} f \ln[1/(r-r')] \quad \dots (3)$$

Reordenando se obtiene

$$2\pi C\phi + \oint_{\partial\Omega} \phi d(\ln[1/(r-r')])/dn = \int_{\partial\Omega} q \ln[1/(r-r')] + \int_{\Omega} f \ln[1/(r-r')] \quad \dots (4)$$

sobre la que es posible aplicar la aproximación de la ecuación 1.

Con objeto de centrar los aspectos fundamentales del método se va a suponer

$$f=0$$

es decir, se estudia un problema de Laplace.

En caso contrario aparece la necesidad de calcular unas integrales extendidas en el dominio, pero que no aportan incógnitas al problema. Como indicaremos más adelante el método habitual consiste en recurrir a unas celdas poligonales de integración.

La ecuación 4 debe aplicarse tantas veces como sea necesario con objeto de generar un número de ecuaciones igual al de incógnitas del problema. En el apartado 3 veremos la forma sistemática utilizada por el MEC para este fin, pero antes se va a tratar la obtención de las integrales para un caso particular.

## 2.ELEMENTOS CONSTANTES.

La interpolación más sencilla que se ocurre es la correspondiente a una aproximación consistente en funciones constantes a trozos a lo largo del contorno. (fig.3).

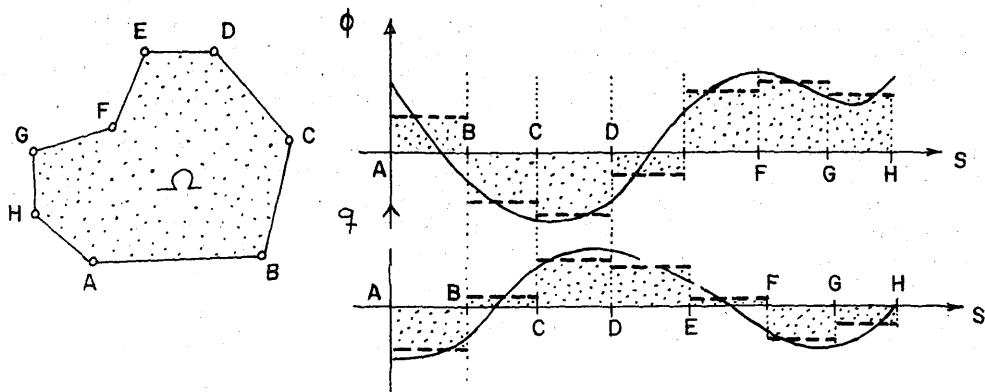


FIGURA 3.

En este caso la ecuacion 4 se transforma en

$$2\pi\phi + \sum_i \oint_{\Gamma_i} \frac{q_i^*}{e} = \sum_i q_i \oint_{\Gamma_i} \frac{\phi_i^*}{e} \quad \dots (5)$$

donde se ha utilizado el simbolo \* para representar a las variables relacionadas con la solución fundamental. Es decir

$$\phi^* = \ln[1 / (r-r')] ]$$

$$q^* = d\{\ln[1 / (r-r')] \} / dn \quad \dots (6)$$

y las integrales se extienden a los trozos de contorno sobre los que se supone la constancia de  $\phi$  y  $q$ .

En forma consistente con la idea isoparamétrica sugerida en el apartado anterior dichos trozos se suelen suponer rectos, para lo cual es preciso escoger los nodos correspondientes. El valor del potencial y del flujo se supone entonces como el que corresponde al punto medio de cada segmento. Con ello se plantea el problema del cálculo de integrales del tipo

$$\begin{aligned} a &= \int_{\Gamma_i} q_i^* \\ b &= \int_{\Gamma_i} \phi_i^* \end{aligned} \quad \dots (7)$$

en las que conviene distinguir los dos casos, siguientes

- 1) El punto F soporte de la aplicación de la solución fundamental se encuentra fuera del segmento sobre el que se realiza la integración.

Utilizando las relaciones indicadas en la figura 4 es inmediato comprobar que

$$\int_1^2 q^* ds = - \int_1^2 d\theta \quad \dots (8)$$

De la misma forma, y tras un par de integraciones por partes se obtiene

$$\int_1^2 \phi^* ds = D \left[ \operatorname{tag} \theta \cdot \ln(\cos \theta / D) + \operatorname{tg} \theta - \theta \right]_{\theta_1}^{\theta_2} \quad \dots (9)$$

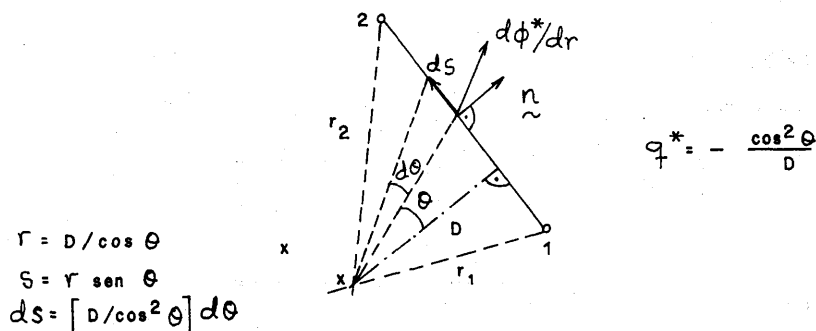


FIGURA 4.

2) El punto P se encuentra sobre el propio elemento.

Puesto que la solución fundamental tiene simetría cilíndrica, su gradiente tiene la dirección del elemento, y por tanto, la derivada respecto a la normal es nula.

En cuanto a la integral del potencial es preciso interpretarla en el sentido del valor principal de Cauchy. Rodeando el centro del elemento (fig. 5) se sitúa una semibola de radio  $\varepsilon$  con lo que

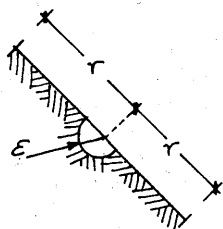


FIGURA 5.

en el intervalo de integracion restante la funcion es regular y puede obtenerse mediante una integracion por partes que , en el limite ,

$$-\int_1^2 \ln r \, dr = 2r (1 - \ln r) \quad \dots (10)$$

En cuanto a la integral sobre la semibola , tiende a cero con  $\epsilon$  por lo que su contribucion desaparece.

Con objeto de aclarar las ideas anteriores , se van a aplicar las fórmulas citadas al ejemplo simple de la figura 6 .

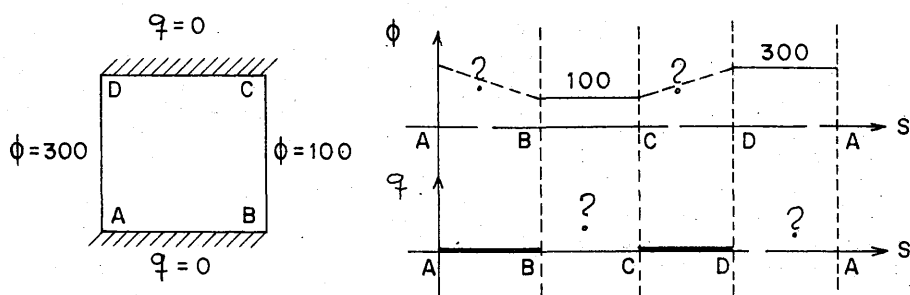


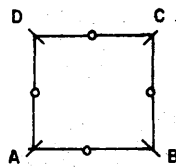
FIGURA 6.

Como puede observarse , si se admite una aproximación constante , el valor del potencial en los centros de los lados AB y CD es 200, por lo que las únicas incógnitas se refieren a los flujos en los centros de los lados BC y DA . El número de incógnitas se reduce aún mas si se tratan las simetrías del problema , que obligan a que ambos flujos sean iguales y de sentidos contrarios ( cosa por otra parte obligada si se piensa que el flujo total a través del contorno debe ser nulo ). De esta manera se afronta un problema dependiente de una sola incógnita , lo que permitirá hacer algunas observaciones de interés sobre las características operativas del método

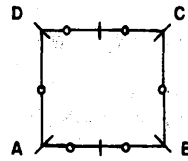
La solución analítica es , evidentemente , un plano que produce una variación lineal del potencial entre los valores especificados en los extremos verticales.

Veamos , figura 7 a) . lo que sucede en el caso en que se elijan como elementos los cuatro lados del cuadrado .

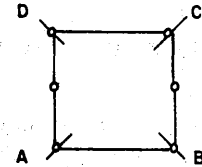
Situando la solución fundamental en el punto medio del lado DA



CUATRO  
ELEMENTOS  
CONSTANTES  
(a)



SEIS  
ELEMENTOS  
CONSTANTES  
(b)



CUATRO  
ELEMENTOS  
2 LINEALES +  
2 CONSTANTES  
(c)

FIGURA 7

se puede formar el siguiente cuadro

ELEMENTO	AB	BC	CD	
$\int q^*$	1.11	0.93	1.11	
$\phi$	200.	100.	200.	
$\phi \int q^*$	222	93	222	= 537

De esta forma , el primer miembro vale

$$300. \pi - 537 = 405.48$$

Para evaluar el segundo miembro se precisa calcular  $\phi^*$  en los elementos BC y DA pues en el resto  $q=0$

En el elemento DA se aplica la formula 10

$$\int \phi^* = 2$$

mientras que en el segmento BC se utiliza la formula 9 tomando como ángulo la mitad del central y duplicando el resultado

$$\int \phi^* = 2 \{ 2 [ 0.5 \ln (1/\sqrt{5}) + 0.5 - 0.465 ] \} = - 1.4694$$

El segundo miembro es pues

$$2 \underset{1}{q^*} - 1.47 \underset{2}{q^*}$$

y si se recuerda que los flujos son iguales y de sentido contrario (lo que , por otro lado , se obtendría sin mas que obtener una nueva ecuación apoyando la solución fundamental en el centro de BC) se tendrá

$$q = - (405.48) / 3.47 = - 116.87$$

2

que compara bien con el valor teórico - 100 .

Para mejorar la aproximación existen varias alternativas . La que podríamos llamar ' h ' ( h representa al tamaño del elemento ) consiste en refinar la malla allí donde se prevean variaciones mas importantes de las variables . La segunda , llamada ' p ' mejora los resultados a base de elevar el grado del polinomio aproximante.

En el primer caso podríamos aumentar a 2 el numero de elementos en los lados AB y CD con lo que el cuadro correspondiente sería

ELEMENTO	AB	BC	CD	
$\int q_1^*$	0.79	0.93	0.79	
$\phi_1$	250.	100	250.	
$\int q_2^*$	0.32	-	0.32	
$\phi_2$	150.	-	150.	
$\sum \phi \int q^*$	245.5	93	245.5	= 584

El primer miembro es ahora

$$942.48 - 584 = 358.48$$

y la nueva predicción

$$q = - 358.48 / 3.47 = - 103.33$$

2

El lector estudioso puede comprobar el tipo de aproximación que se consigue con aumentos sucesivos del numero de elementos , pero ahora pasaremos a la llamada aproximación ' p '.

En el presente caso el refinamiento consistiría en suponer una evolución lineal del potencial en los lados AB y CD , lo que representa la situación real . Para el lado AB , por ejemplo , se tiene

$$\phi = 300 - 100 s$$

La integral de interés es



$$\int_1^2 q^* = -D \int_1^2 \tan \theta \, d\theta = D \ln(\cos \theta) \Big|_{\theta_1}^{\theta_2}$$

Si suponemos el primer caso del ejemplo anterior, es decir, que las paredes impermeables se modelan con un único elemento, la integral anterior vale  $-0.8$  y por tanto el primer miembro de la igualdad BIEM es

$$942.48 - [(300 \times 1.11 - 100 \times .8) \times 2 + 93] = 343.48$$

con lo que la predicción del flujo es

$$q = -343.48 / 3.47 = 98.99$$

que, según se ve, es muy adecuada.

Tras el análisis de los ejemplos anteriores es fácil ver cómo funciona el MEC standard; sobre el contorno se eligen una serie de nodos que servirán de apoyo para la integración y en cuyos puntos medios se consideraran situados los polos de las soluciones singulares necesarias para la ponderación. De forma muy sistemática se consiguen formar así los valores  $a'$  que corresponden a las integrales del flujo a lo largo del elemento  $j$  cuando el polo de la solución fundamental se sitúa en el centro del elemento  $i$ . Para formar la matriz de influencia definitiva a sólo queda añadir a los términos de la diagonal principal los valores  $c \phi(i)$ . Obsérvese que, si se considera la interpolación isoparamétrica el contorno está formado por una serie de segmentos rectos y, como el polo se sitúa en el centro, el contorno es liso y  $c = 1/2$ . En cuanto al segundo miembro se procede igualmente al cálculo de los  $b$  correspondientes a la integral del potencial a lo largo del elemento  $j$  cuando el polo de la solución fundamental se sitúa en  $i$ . El sistema de ecuaciones que se obtiene adopta pues la forma

$$a \begin{matrix} \phi \\ ij \end{matrix} = b \begin{matrix} q \\ j \end{matrix} \quad \dots (11)$$

En el caso de un problema de Dirichlet ( $\phi$  dato) el primer miembro se puede reducir a un vector, y la resolución del sistema resultante produce los flujos incógnita  $q$ . En el caso de un problema de Neumann ( $q$  dato) el proceso es el recíproco. Finalmente, cuando se presenta un problema mixto, la reordenación de la ecuación anterior, colecionando en un vector  $x$  las incógnitas y en un vector  $f$  los datos conduce al sistema

$$K x = f \quad \dots (12)$$

que se resuelve con los procedimientos habituales.

Mediante este procedimiento se dispone de los valores de flujo y potencial en el contorno. Si, además, se desean los valores en

algun punto interior , basta utilizar la formula de representación típica , situando el polo en el punto de interes y haciendo  $c=1$  .

De la misma forma , el lector puede desarrollar una fórmula de representación que le permita calcular las componentes del gradiente en un punto interior del dominio.

### 3. INTEGRACION NUMERICA.

El ejemplo del apartado anterior es una muestra de cómo funciona el método . En particular , puede verse la importancia que tiene el cálculo de las integrales , que constituyen los coeficientes del sistema de ecuaciones a resolver . Aunque en los casos presentados hasta ahora es posible proceder a una integración analítica , se comprende que cuando el grado del polinomio de interpolación aumente , o en otros problemas , la labor sea tediosa si no imposible . Por ello se suele recurrir a procesos de integración numerica que evitan además la posibilidad de errores de transcripcion y , en algunos casos , son mas rápidos que la aplicación de las formulas exactas .

El metodo típico para el caso en que el polo se encuentre fuera del elemento donde se realiza la integración es una cuadratura de Gauss del tipo

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) \cdot d\xi \sim \sum_{i=1}^n w_i f(\xi_i) \quad \dots (11)$$

donde  $w_i$  son coeficientes de ponderacion ,  $\xi_i$  la coordenada del punto de integracion  $i$  y  $n$  el numero total de puntos de integracion.

Como es sabido este metodo permite obtener de forma exacta el valor de la integral para polinomios de grado hasta  $2n-1$ .

En la tabla siguiente se indican algunos valores de las abscisas y coeficientes de ponderacion .

n	i	$\xi_i$	$w_i$
1	1	0	2
2	1	$1/\sqrt{3}$	1
	2	$-1/\sqrt{3}$	-1
3	1	0	8/9
	2	$\sqrt{15}/5$	5/9
	3	$-\sqrt{15}/5$	5/9
4	1	0.861 136 31	.347 854 85
	2	- 0.861 136 31	.347 854 85
	3	0.339 981 04	.652 145 15
	4	- 0.339 981 04	.652 145 15

Para el caso en que la singularidad esté contenida en el propio elemento es posible utilizar integrales ponderadas con una función logarítmica

$$I = \int_0^1 [\ln(1/\xi)] \cdot f(\xi) d\xi \sim \sum_{i=1}^n w_i f(\xi_i) \quad \dots (12)$$

algunos de cuyos casos se recogen a continuación.

n	i	$\xi_i$	$w_i$
2	1	0.112 008 20	0.718 539 31
	2	0.602 276 90	0.281 460 68
3	1	0.063 890 79	0.513 404 55
	2	0.368 997 06	0.391 280 04
	3	0.766 880 30	0.094 615 40
4	1	0.041 448 48	0.383 464 06
	2	0.245 274 91	0.386 875 31
	3	0.556 165 45	0.190 435 12
	4	0.848 982 39	0.039 225 48

Valores adicionales, así como otros casos de interés, pueden obtenerse por ejemplo en la obra clásica de Stroud y Secrest.

Para ver cómo se opera en forma numérica es conveniente retomar

el ejemplo del apartado anterior , suponiendo el caso de elementos constantes ;las integrales del primer miembro tienen la forma

$$\int q^* ds = - \int_{-1}^1 (D / r ) (L/2) d\xi = - (DL/2) \int d\xi / r \quad \dots (13)$$

donde el factor  $L/2$  aparece al realizar la aplicación del segmento de longitud  $L$  sobre el intervalo de integración  $[-1, 1]$ .

La integración de Gauss sera pues del tipo

$$\int q^* = - (DL/2) \sum w(i)/r(i) \quad \dots (14)$$

Igualmente , las integrales del segundo miembro son

$$\int \phi^* = \int \ln(1/r) ds = \int_{-1}^1 \ln[1/r(\xi)] (L/2) d\xi \sim \sum_{i=1}^N (L/2) \ln[1/r(\xi_i)] w(\xi_i) \quad \dots (15).$$

siempre que el polo no se encuentre sobre el elemento.

Caso de aplicar la formula de integración logarítmica , por simetría , se tiene

$$\int \phi^* = L w(i)$$

que , si se observan los valores que la tabla anterior proporciona para  $w(i)$  , se reduce a

$$\int \phi^* = L$$

En el ejemplo citado , si se usa un solo punto de integración ,

ELEMENTO	AB	BC	CD	
$(DL/2)w(i)$	2	4	2	
$r(i)$	2	4	2	
$\int q^*$	- 1	- 1	- 1	
$\phi$	200	100	200	
$\phi \int q^*$	-200	-100	-200	= 500

De esta forma , el primer miembro vale

$$942.48 - 500 = 442.48$$

En el segundo miembro , la contribución del elemento DA es según lo dicho mas arriba ,  $-L = -2$  ; y la del elemento BC

$$L \ln (1/2) = -2 \times 0.69 = -1.38$$

La aproximación conseguida es pues

$$q = -442.48 / 3.38 = -130.91$$

Como se ve , el valor se encuentra un tanto alejado del que se obtuvo anteriormente mediante una integral exacta .

Ello se debe al bajo orden de integración utilizado . En efecto, bastaría aumentar a 2 el numero de puntos de integración por elemento para que ( según ejercicio que recomendamos al lector ) se obtuviera

$$q = -114.39$$

2

que compara perfectamente con el valor 'exacto' .

#### 4.ELEMENTOS LINEALES.

El caso de los elementos lineales es , en todo , análogo al de los constantes , con las particularidades que le confiere el hecho de situar los polos en los extremos de los elementos y , por tanto , la existencia de posibles puntos angulosos en los mismos . Esto significa que , en el calculo de  $c$  , sera preciso evaluar el ángulo de las tangentes al contorno ( lo que se evitara con un ingenioso artificio que expondremos mas abajo ) y , lo que es mas importante , reconocer la existencia de dos flujos , antes y despues de cada nodo , debido a la existencia de dos normales .

El analisis general pasa pues por las siguientes etapas:

a) Fijacion de los elementos de discretización del contorno (fig.8)

Segun es habitual , la malla se hace mas fina en aquellas zonas de mayor curvatura del contorno , o alli donde las variables puedan experimentar variaciones mas bruscas.

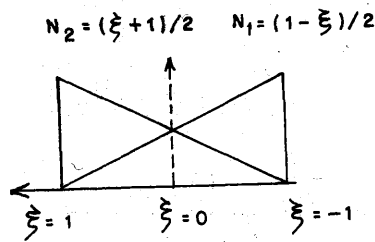
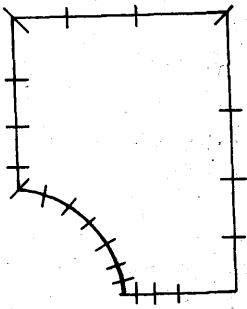


FIGURA 8

FIGURA 9

b) Interpolación lineal.

En el interior de cada elemento (fig. 10) tanto el potencial como el flujo se aproximan mediante las funciones de forma lineales

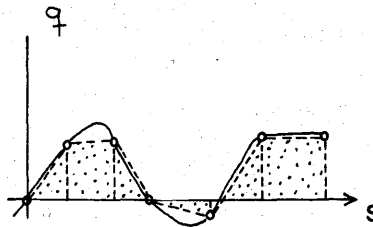
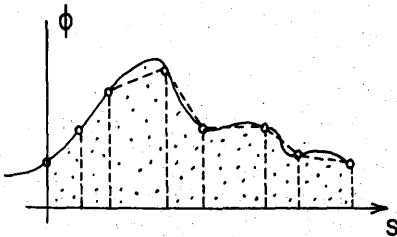


FIGURA 10

FIGURA 11

$$N_1(\xi) = -(\xi - 1)/2$$

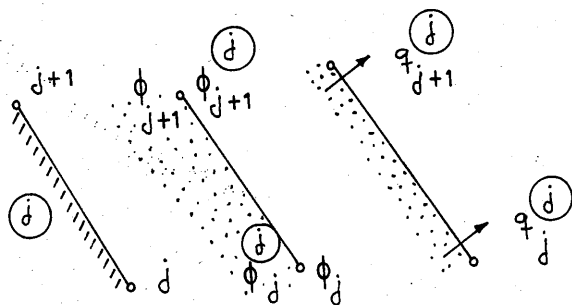
$$N_2(\xi) = (\xi + 1)/2$$

$$\xi = s / L$$

... (16)

En general se supone continuidad del potencial, por lo que la variable  $\phi$  es puramente nodal y

$$\begin{aligned}
 2 c(i) \phi(i) + \sum_{j=1}^N L_j \left[ \int_j N_1(\xi) q^*(\xi) d\xi; \int_j N_2(\xi) q^*(\xi) d\xi \right] \begin{bmatrix} \phi_j^{(j)} \\ \phi_j^{(j)} \\ \phi_{j+1}^{(j)} \end{bmatrix} = \\
 = \sum_{j=1}^N L_j \left[ \int_j N_1(\xi) \phi^*(\xi) d\xi; \int_j N_2(\xi) \phi^*(\xi) d\xi \right] \begin{bmatrix} q_j^{(j)} \\ q_j^{(j)} \\ q_{j+1}^{(j)} \end{bmatrix} \\
 \dots (20)
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} j & j+1 \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = \\
 & \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = \\
 & \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} 2j & 2j+1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

FIGURA 12

En la figura se recogen las contribuciones que cada elemento dirige a las matrices finales A y B. Puede observarse que, en general, A es  $n \times n$  mientras B es  $2n \times 2n$ ; donde n es el número de puntos de colocación. El tamaño de B está condicionado por la existencia de dos normales alrededor de cada nodo, y para proceder a la resolución del sistema es preciso añadir condiciones de continuidad de la función. Para ello se procede a identificar los diferentes casos que se pueden producir alrededor de una esquina, (fig. 12)

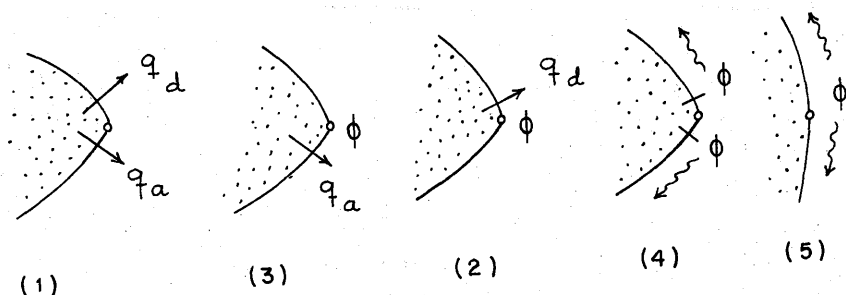


FIGURA 12

Según el orden elegido en el programa de ordenador incluido en el apéndice, estos casos corresponden a los siguientes juegos de datos

- 1)  $q_a, q_d$
- 2)  $\phi, q_d$
- 3)  $\phi, q_a$
- 4)  $\phi, \phi$  (esquina angulosa)
- 5)  $\phi, \phi$  (esquina lisa)

El caso 1 se refiere a una condición de tipo Neumann, y no presenta ningún problema; basta realizar el producto de los



datos por las integrales correspondientes . Los casos 2 y 3 son semejantes en cuanto que dejan libre una sola incógnita ,  $q(a)$  y  $q(d)$  respectivamente , para determinar por la correspondiente ecuación de colocación .

La solución evidente para el caso 5 es

$$q_a = q_d$$

lo que , de nuevo , reduce en uno el numero de incógnitas .

Obsérvese que esta condición sólo es exacta en el contorno real , y no en el discretizado donde aparece forzosamente un ángulo . Sin embargo la aproximación sería cierta en el límite , y los resultados numéricos que se obtienen confirman su validez .

Finalmente el caso 4 corresponde a una condicion de Dirichlet que, si no existe singularidad en el vértice , puede resolverse por completo , ya que el conocimiento de las derivadas de  $\phi$  a lo largo del contorno , existente desde el momento en que se conoce  $\phi$  , permite determinar el gradiente de la funcion  $\phi$  en la esquina y ,por tanto ,  $q(a)$  y  $q(d)$  . Puede así prescindirse de una ecuación a base de desarrollar un 'elemento esquina' (Alarcon et al.1980)[48],o bien dejar libre el valor del gradiente(Alarcon et al.1978 [25]con el fin de matener el numero de ecuaciones . Un ejemplo de la incorporación de esta última condición en un programa de ordenador puede verse en Alarcon et al. 1979.[26]

Evidentemente con una programación cuidadosa es posible ir identificando incognitas y los datos para formar directamente el sistema

$$K.X = F$$

que es preciso resolver . Un ejemplo del modo de proceder se encuentra en el programa incluido en el apéndice . En él puede verse además cómo organizar los cálculos de modo que se aprovecha al máximo la información que se va obteniendo en cada paso ; vg.: en lugar de calcular las integrales desde cada nodo al resto de los elementos , lo que implica el cálculo repetido de longitudes, coordenadas de puntos de integración , etc , es preferible fijar un elemento y calcular las contribuciones que afectan a cada nodo . Pequeñas ideas de este tipo son fundamentales para la eficiencia del método , pues para el cálculo de los elementos de las matrices A y B se necesita la mayor parte del tiempo que se emplea en resolver el problema.

Un aspecto importante es la evaluación de la constante correspondiente a cada esquina . Como ya se dijo , es posible realizar el cálculo directamente . Existe sin embargo un interesante artificio debido a Cruse , que permite obtener directamente los elementos de la diagonal principal de la matriz A . La idea es la siguiente: en el caso de un problema ficticio de

$\phi$  = constante en el dominio, se debe cumplir  $q = 0$  en todo el contorno, por lo que

$$A \cdot \phi = 0 \quad \dots (21)$$

y, puesto que  $\phi$  = constante

$$a_{ii} = - \sum_{j \neq i} a_{ij} \quad \dots (22)$$

lo que permite determinar la diagonal directamente, a partir del resto de los elementos de la fila.

Como ejemplo de aplicación del programa CABEM se incluye a continuación el problema de la figura.

Coincide con el primer ejemplo de mecánica de fluidos que fue presentado por Martin y Carey con elementos finitos. Se trata del movimiento de un fluido perfecto alrededor de un cilindro circular, en el interior de un canal formado por dos placas impermeables. El problema puede reducirse debido a las simetrías y las condiciones de contorno dependen del tipo de planteamiento que se utilice. Si, por ejemplo, se pretende trabajar con la función potencial,

$$v_x = d\phi/dx$$

$$v_y = d\phi/dy$$

es inmediato ver que el eje de simetría y el borde del cilindro son una línea de corriente, al igual que el borde superior, por lo que

$$q = 0$$

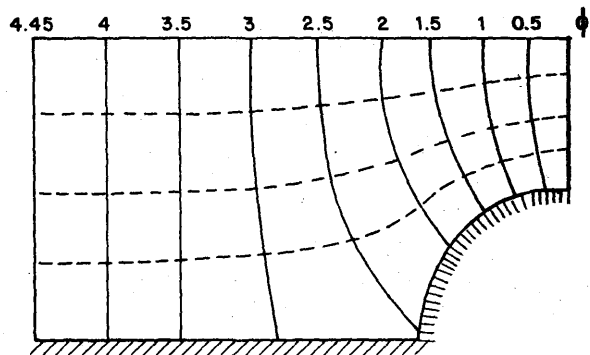
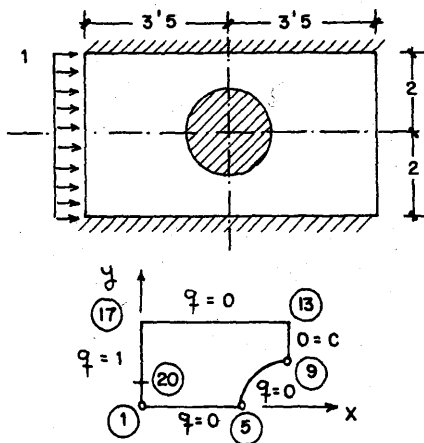
como la velocidad de entrada es constante a lo largo del lado vertical se tiene

$$q = 1$$

donde  $v_x = 1$  es la componente de la velocidad según el eje horizontal.

Por otro lado, en la embocadura de salida, se desconoce la variación de la velocidad, pero, por simetría, se trata de una línea de potencial, perpendicular a las de corriente, y por tanto podemos fijar un valor de referencia

$$\phi = 0$$



SOLUCION DE CHUNG [49]

FIGURA13

En la figura se muestra la discretización utilizada y en la pagina siguiente se recogen los resultados obtenidos con la aplicacion del programa.

#### BOUNDARY CONDITIONS

=====

Node Code	$\bar{q}$	$\delta\bar{q}/\delta n$ (bef)	$\delta\bar{q}/\delta n$ (aft)
1	1	.00000E+00	.10000E+01
2	1	.00000E+00	.00000E+00
3	1	.00000E+00	.00000E+00
4	1	.00000E+00	.00000E+00
5	1	.00000E+00	.00000E+00
6	1	.00000E+00	.00000E+00
7	1	.00000E+00	.00000E+00
8	1	.00000E+00	.00000E+00
9	3	.00000E+00	.00000E+00
10	5	.00000E+00	.00000E+00
11	5	.00000E+00	.00000E+00
12	5	.00000E+00	.00000E+00
13	2	.00000E+00	.00000E+00
14	1	.00000E+00	.00000E+00
15	1	.00000E+00	.00000E+00
16	1	.00000E+00	.00000E+00
17	1	.00000E+00	.10000E+01
18	1	.00000E+00	.10000E+01
19	1	.00000E+00	.10000E+01
20	1	.00000E+00	.10000E+01

#### COORDINATES OF THE NODES

=====

1	.0000E+00	.0000E+00
2	.6250E+00	.0000E+00
3	.1250E+01	.0000E+00
4	.1875E+01	.0000E+00
5	.2500E+01	.0000E+00
6	.2576E+01	.3835E+00
7	.2793E+01	.7071E+00
8	.3117E+01	.9239E+00
9	.3500E+01	.1000E+01
10	.3500E+01	.1250E+01
11	.3500E+01	.1500E+01
12	.3500E+01	.1750E+01
13	.3500E+01	.2000E+01
14	.2625E+01	.2000E+01
15	.1750E+01	.2000E+01
16	.8750E+00	.2000E+01
17	.0000E+00	.2000E+01
18	.0000E+00	.1500E+01
19	.0000E+00	.1000E+01
20	.0000E+00	.5000E+00

Como puede observarse los resultados son excelentes.

# RESULTS

=====

Node	Code	$\bar{q}$	$\delta\bar{q}/\delta n$ (bef)	$\delta\bar{q}/\delta n$ (aft)
1	1	+ .44978E+01	+ .10000E+01	+ .00000E+00
2	1	+ .38774E+01	+ .00000E+00	+ .00000E+00
3	1	+ .32825E+01	+ .00000E+00	+ .00000E+00
4	1	+ .27550E+01	+ .00000E+00	+ .00000E+00
5	1	+ .24708E+01	+ .00000E+00	+ .00000E+00
6	1	+ .22963E+01	+ .00000E+00	+ .00000E+00
7	1	+ .17741E+01	+ .00000E+00	+ .00000E+00
8	1	+ .97142E+00	+ .00000E+00	+ .00000E+00
9	3	+ .00000E+00	+ .00000E+00	- .30245E+01
10	5	+ .00000E+00	- .19960E+01	- .19960E+01
11	5	+ .00000E+00	- .18996E+01	- .18996E+01
12	5	+ .00000E+00	- .17495E+01	- .17495E+01
13	2	+ .00000E+00	- .18596E+01	+ .00000E+00
14	1	+ .14608E+01	+ .00000E+00	+ .00000E+00
15	1	+ .26132E+01	+ .00000E+00	+ .00000E+00
16	1	+ .35760E+01	+ .00000E+00	+ .00000E+00
17	1	+ .44736E+01	+ .00000E+00	+ .10000E+01
18	1	+ .44727E+01	+ .10000E+01	+ .10000E+01
19	1	+ .44820E+01	+ .10000E+01	+ .10000E+01
20	1	+ .44926E+01	+ .10000E+01	+ .10000E+01

## EJERCICIOS

1. Desarrollar una fórmula de integración semejante a la (10) para el caso lineal .

2. Estudiar el desarrollo de un elemento con interpolación tipo parábola y discutir los efectos de un descentrado del nodo intermedio.

3. Analizar las ventajas e inconvenientes de una interpolación simultánea de las variables y de la solución fundamental con las mismas funciones de forma ( vg.:: polinomios de Hermite ) en relación con el cálculo de las integrales que aparecen en las matrices de influencia .

4. Desarrollar un elemento 'infinito' ( vg.:: con una función tipo exponencial ) e incorporarlo al programa incluido en el apéndice.

5. Modificar el programa CABEM de modo que permita el tratamiento de dominios múltiplemente conexos. (Atención al sentido de giro en el contorno y a la identificación del último nodo con el primero).

6. Desarrollar un elemento constante en  $\phi$  que permita la aparición de una singularidad en  $q$  en un extremo de él , mediante el uso de una función de interpolación ad-hoc .

7. Aplicar el programa del apéndice al caso de un cuadrado sometido a torsión , utilizando las condiciones de simetría . Con los resultados obtenidos para el alabeo ,resolver un problema tipo Dirichlet .Discutir los resultados.

8. Demostrar que para el caso de contorno curvo e integración sobre el propio elemento con interpolación lineal

$$\int_{-1}^1 \ln(1/r) f(\xi) d\xi$$

puede escribirse como la suma de una integral

$$\int_{-1}^1 \ln[(1+\xi)/2r] f(\xi) d\xi$$

que puede integrarse con un Gauss normal y otra

$$2 \int_0^1 \ln(1/\xi) f(\xi) d\xi \quad \text{con} \quad \xi = (\xi + 1)/2$$

que se resuelve por aplicación de la fórmula de Stroud y Secrest.  
Analizar la aplicación a elementos constantes.

## CAPITULO V

### PROBLEMAS TRIDIMENSIONALES

En este capítulo se va a desarrollar la aplicación del método de los elementos de contorno a problemas gobernados por las ecuaciones de Laplace o Poisson con geometría tridimensional.

Si el dominio tiene una relación volumen / superficie grande, las economías obtenidas en comparación con otros métodos son notables.

Tras plantear de nuevo las ecuaciones integrales y la solución fundamental correspondiente al caso tridimensional, se procederá a desarrollar el ejemplo mas simple, elementos constantes, junto con los problemas de integración que conlleva. Se indicará también el tratamiento que debe darse a elementos de orden superior y, finalmente, se expondrán algunos ejemplos de aplicación.

Aunque en potencial, el tratamiento de las integrales de volumen no se ha sistematizado tanto como en elasticidad, se incluyen al final de capítulo indicaciones para algunos casos de interes.

#### 1.PROBLEMA TIPO

Vamos a centrarnos en problemas

$$\nabla^2 \phi = -f$$

$$\nabla^2 \phi = 0$$

... (1)

con las condiciones de contorno habituales

$$\phi = 0$$

tipo Dirichlet.

$$d\phi/dn = q$$

tipo Neumann.

$$a(d\phi/dn) + b\phi = c$$

tipo Newton-Robin

En la mayoría de los casos, las situaciones no serán estrictamente puras, sino que diferentes zonas del contorno estarán sometidas a diferentes sollicitaciones. Se habla entonces de condiciones mixtas que, a veces, se generan artificialmente mediante consideraciones de simetría según se vio ya en el caso plano.

En la figura 1, por ejemplo, se bosquejan diferentes casos para

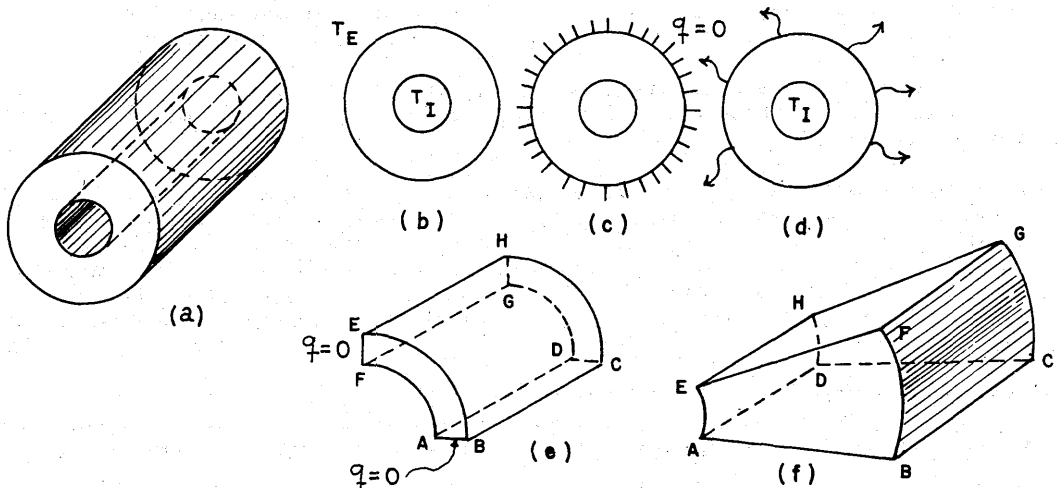


FIGURA 1

una pieza cilíndrica cuyo interior se encuentra a una temperatura  $T_I$ . Si toda la superficie exterior (incluidas las bases del cilindro anular) se halla a una temperatura  $T_E$ , estamos ante un problema de Dirichlet tal como se indica en la figura 1. a. Si el exterior está completamente aislado (fig. 1c) se tiene un



problema mixto con una condición de Neumann en la zona con aislamiento. En 1.d se admite la posibilidad de convección en el exterior, con lo que nuevamente se recae en un problema mixto Dirichlet - Newton - Robin. Finalmente, en las figuras 1.e y 1.f se sugiere la posibilidad de establecer, mediante el uso de la simetría, paredes adiabáticas ABCD, EFGH con flujo cero, que transforman 1.b en casos mixtos.

## 2.ECUACION INTEGRAL Y SOLUCION FUNDAMENTAL.

Según se indicó en el capítulo III, la solución fundamental correspondiente al caso tridimensional tiene la forma (fig.2)

$$\phi^*(P, Q) = 1 / [ r(P) - r(Q) ] = 1/r \quad \dots (2)$$

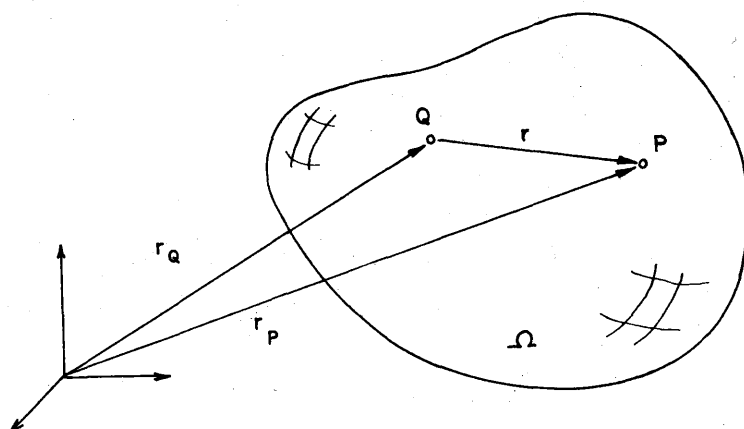


FIGURA 2

donde Q es el punto de aplicación de la carga puntual y P el de observación de su efecto.

En un problema de tipo Poisson

$$-\nabla^2 \phi = 4\pi \rho = f \quad \dots (3)$$

la aplicación del teorema de reciprocidad con la solución fundamental produce la ecuación básica

$$4\pi \phi(P) = \int_{\partial\Omega} q(Q)/r(P, Q) \, ds(Q) - \int_{\partial\Omega} \phi(Q) [d(1/r)/dn] \, ds(Q) +$$

$$+ \int_{\Omega} f(Q) \cdot [1/r] \, dv(Q) \quad \dots (4)$$

donde P está incluido en el dominio  $P \in \Omega$ , y el punto Q va recorriendo el dominio y el contorno, según la integral que deba realizarse.

El caso de interés para la técnica que se pretende desarrollar se obtiene cuando  $P \in \partial\Omega$

$$c \cdot \phi(P) = \int_{\partial\Omega} [q(Q)/r] \, ds(Q) - \int_{\partial\Omega} \phi(Q) [d(1/r)/dn] \, ds(Q) + \int_{\Omega} f(Q) (1/r) \, dv(Q) \quad \dots (5)$$

con  $c=2\pi$  si la superficie es lisa. En caso contrario c equivale al ángulo sólido abarcado desde el vértice P.

Así pues, (5) es la fórmula de representación general con

$$c(P) = \begin{cases} 4\pi & \text{si } P \in \Omega \\ 2\pi & \text{si } P \in \partial\Omega \\ 0 & \text{si } P \in \bar{\Omega} \end{cases} \quad \dots (6)$$

Aunque después de la discusión contenida en el capítulo III ello no es estrictamente necesario, vamos a obtener la fórmula anterior directamente a partir de la ecuación de reciprocidad

$$\int_{\Omega} f \ast \phi + \int_{\partial\Omega} \phi \, q \ast = \int_{\Omega} f \, \phi \ast + \int_{\partial\Omega} \phi \ast \, q \quad \dots (7)$$

con

$$\nabla^2 \phi \ast = f \ast = -4\pi \delta(P)$$

$$\nabla^2 \phi = -f = -4\pi \rho$$

$$q = d\phi/dn$$

$$q \ast = d\phi \ast / dn$$

$$\phi \ast = 1/r(P, Q)$$

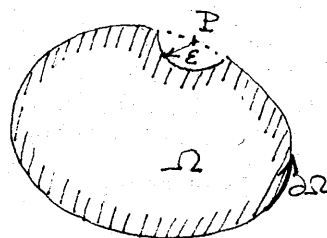


FIGURA 3

Del dominio eliminamos un trozo de bola de radio  $\epsilon$  centrada en P y observamos el resultado cuando  $\epsilon \rightarrow 0$

Evidentemente

$$\int_{\Omega} f \cdot \phi^* = 0 \quad \dots (8)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{E}} \phi \cdot q^* da = \phi(P) \int_{\mathcal{E}} \sin \varphi d\varphi d\theta = -\phi(P) \cdot w_{\mathcal{E}} \quad \dots (9)$$

Obsérvese que el signo - se transforma en + cuando nos referimos a la normal exterior a  $\Omega$ .

$w_{\mathcal{E}}$  es el ángulo sólido definido por la intersección de la bola centrada en P y el dominio

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{E}} f \phi^* da = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(P) \int_{\mathcal{E}} \sin \varphi d\varphi d\theta = 0 \quad \dots (10)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{E}} \phi^* q da = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} q(P) \int_{\mathcal{E}} \sin \varphi d\varphi d\theta = 0 \quad \dots (11)$$

de acuerdo con todo ello, la ecuación (7) se convierte en

$$w_{\mathcal{E}} \phi(P) + \int_{\partial\Omega} \phi \cdot q^* = \int_{\Omega} f \cdot \phi^* + \int_{\partial\Omega} \phi^* q \quad \dots (12)$$

que es, exactamente, la ecuación 5 segun se había visto.

### 3.ELEMENTOS DE CONTORNO

Supóngase provisionalmente que  $q=0$ . Es decir, se está de nuevo ante un problema de Laplace. La ecuación (4) incluye variables definidas exclusivamente en el contorno y, por lo tanto, el proceso de discretización puede limitarse a él.

Como en capítulos anteriores los 'elementos' se generan al proceder a una interpolación con funciones definidas localmente.

El caso mas sencillo se obtiene con 'elementos constantes', es decir, escamas planas en las que se supone que tanto el flujo como el potencial son constantes. Además estas escamas se toman de forma triangular de modo que los potenciales o flujos representativos se hacen corresponder al centro de gravedad de cada triángulo(fig.4)

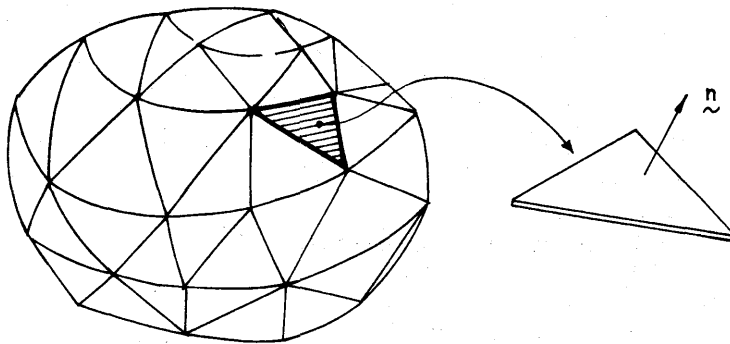


FIGURA 4

Así

$$\phi = \sum_e \phi_e$$

$$q = \sum_e q_e$$

... (13)

y la ecuación de referencia se reduce a

$$c(P) \cdot \phi(P) + \sum_e \phi_e \int_e q^* = \sum_e q_e \int_e \phi^*$$

... (14)

Si la superficie ha sido discretizada en  $N$  escamas existen  $N$  valores  $\phi_i$  y  $N$  valores  $q_i$  de los que, la mitad son datos de contorno (o existirán relaciones lineales entre ellos), de modo que basta establecer  $N$  ecuaciones similares a (14), colocando la solución fundamental en cada uno de los c.d.g. de los elementos, para obtener el sistema

$$\begin{bmatrix} c_1 & & & \\ & c_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & c_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1N} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{N1} & q_{N2} & \dots & q_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_N \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \phi & * & \phi & \dots & \phi \\ 11 & 12 & 1N \\ \phi & * & \phi & \dots & \phi \\ 21 & 22 & 2N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi & * & \phi & \dots & \phi \\ N1 & N2 & NN \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ 1 \\ q \\ 2 \\ \vdots \\ q \\ N \end{bmatrix} \\
 = & \begin{bmatrix} \phi & * & \phi & \dots & \phi \\ 11 & 12 & 1N \\ \phi & * & \phi & \dots & \phi \\ 21 & 22 & 2N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi & * & \phi & \dots & \phi \\ N1 & N2 & NN \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ 1 \\ q \\ 2 \\ \vdots \\ q \\ N \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \quad \dots (15)$$

que , sinteticamente , se escribe

$$\begin{matrix} A & \phi & = & B & q \\ \sim & \sim & & \sim & \sim \end{matrix}
 \quad \dots (16)$$

Observe que , al tratarse de elementos planos  $c=2\pi$  .Sin embargo , es usual proceder de la misma forma que en 2 dimensiones para el cálculo de los elementos de la diagonal principal de la primera matriz ; esto es , suponiendo el campo hipotético de 'equilibrio'

$$\phi = \text{constante} \quad q = 0$$

y , por tanto ,

$$(a_{ii} + \sum_{i \neq j} a_{ij}) \phi = 0$$

es decir

$$a_{ii} = - \sum_{i \neq j} a_{ij}
 \quad \dots (17)$$

El resto de los elementos de las matrices puede obtenerse analítica o numéricamente según se verá en el apartado siguiente. A continuación , la imposición de las condiciones de contorno permite pasar de la ecuación (16) a un sistema  $N \times N$

$$\begin{matrix} K & x & = & F \\ \sim & \sim & & \sim \end{matrix}
 \quad \dots (18)$$

donde en  $\tilde{x}$  se recogen las incógnitas del problema , y que se resuelve por los métodos habituales.

Si , además , se desean los valores del potencial en puntos interiores , se procede a una aplicación de la fórmula (4) para todos y cada uno de los citados puntos.

#### 4. CALCULO DE LOS ELEMENTOS DE LAS MATRICES DE INFLUENCIA

Los elementos de la matriz A son del tipo

$$a_{ij} = \int_j q_{ij}^* da = \int_j \text{grad}(1/r) \cdot \vec{n} da = - \int_j \frac{1}{r^3} (\vec{r} \cdot \vec{n}) da \quad \dots (19)$$

Pero (fig.5)  $\vec{r} \cdot \vec{n}$  es la distancia  $D_{ij}$  del punto i al elemento j, de modo que

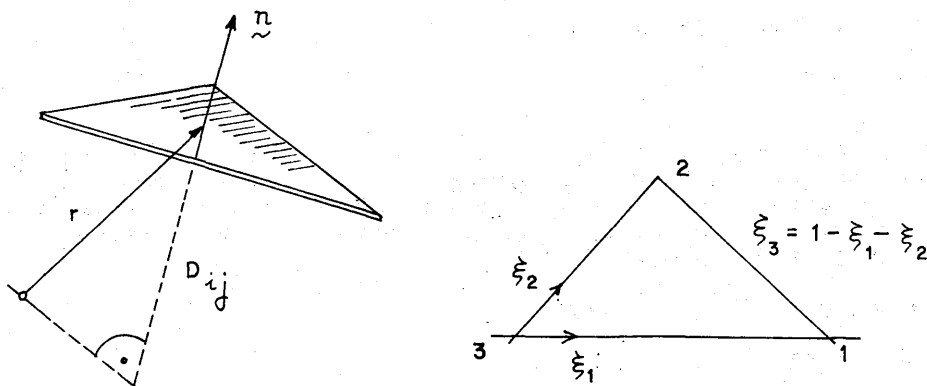


FIGURA 5

$$a_{ij} = - D_{ij} \int_j \frac{1}{r^3} da \quad \dots (20)$$

siempre que  $i \neq j$ .

Si  $i=j$ , y debido a la simetría de la distribución originada por la carga puntual, la variación según la normal al elemento es nula. La integración de (20) en forma analítica es posible, pero en general, se prefiere recurrir a una integración numérica. En la tabla siguiente se dan los coeficientes de ponderación y puntos de integración para una fórmula tal como

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-\xi_2} f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) d\xi_1 d\xi_2 = \sum_{i=1}^n w_i f(\xi_1^i, \xi_2^i, \xi_3^i) \quad \dots (21)$$

$n$	$i$	$\xi_1^i$	$\xi_2^i$	$\xi_3^i$	$w_i$
1	1	1/3	1/3	1/3	1
2	1	1/2	1/2	0	1/3
	2	0	1/2	1/2	1/3
	3	1/2	0	1/2	1/3
4	1	1/3	1/3	1/3	-9/16
	2	3/5	1/5	1/5	25/48
	3	1/5	3/5	1/5	25/48
	4	1/5	1/5	3/5	25/48
7	1	0.333 333 33	0.333 333 33	0.333 333 33	0.225 000 00
	2	0.797 426 99	0.101 286 51	0.101 286 51	0.125 929 18
	3	0.101 286 51	0.797 426 99	0.101 286 51	0.125 939 18
	4	0.101 286 51	0.101 286 51	0.797 426 99	0.125 939 18
	5	0.059 715 87	0.470 142 06	0.470 142 06	0.132 394 16
	6	0.470 142 06	0.059 715 87	0.470 142 06	0.132 394 16
	7	0.470 142 06	0.470 142 06	0.059 715 87	0.132 394 16

Los elementos de la matriz B son

$$b_{ij} = \int_j (1/r) ds \quad \dots (22)$$

Al igual que anteriormente, cuando  $i \neq j$  el cálculo se realiza mediante una cuadratura numérica con la tabla anterior. Por otro lado, si  $i$  coincide con el baricentro del elemento  $j$  es preciso aclarar analíticamente la situación.

Para ello (fig.6)

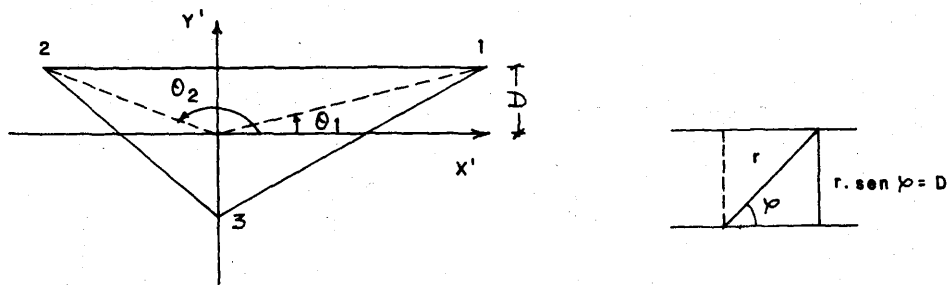


FIGURA 6

se subdivide el triángulo en otros tres y se trabaja en coordenadas polares. Puesto que

$$da = r dr d\varphi$$

$$I_{12} = \iint (1/r) r dr d\varphi = \iint dr d\varphi = \int r(\varphi) d\varphi \quad \dots (23)$$

y como

$$r \sin \varphi = D$$

$$I_{12} = D \int_0^{\theta} \int_1^2 (1/\sin \varphi) d\varphi = D \ln \operatorname{tg}(\varphi/2) \Big|_0^{\theta} \Big|_1^2 \quad \dots (24)$$

De modo que

$$b_{ij} = I_{12} + I_{13} + I_{31} \quad \dots (25)$$



## 5. EJEMPLO

Como ejemplo sencillo de aplicación consideremos (fig. 7) la generalización tridimensional del problema expuesto en el capítulo anterior.

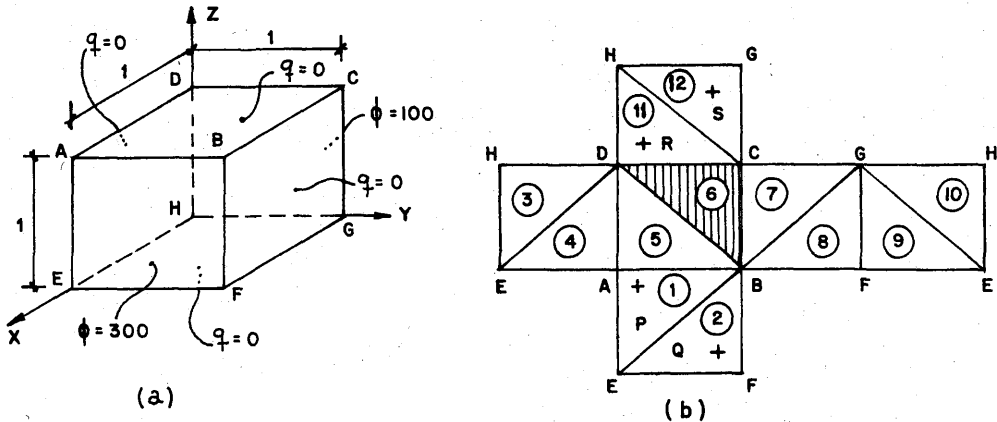


FIGURA 7

Para simplificar, supondremos variación lineal en el potencial

$$\phi = 100 + 200x$$

lo que cumple

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = 200$$

es decir, las condiciones de flujo en el contorno.

Como, además, se verifican las condiciones de potencial en el contorno, se trata de la solución exacta, lo que permite conocer que los flujos en las caras ABEF y HGCD serán iguales y de sentido contrario, con valor absoluto 200.

Evidentemente, la discretización más adecuada a este caso sería la formada por cuadriláteros. No obstante, para ser congruentes con lo planteado más arriba, se procederá al uso de elementos triangulares como se muestra en la figura 7 (b).

Para simplificar el trabajo numérico vamos a colocar la solución fundamental en el punto P (1, 1/3, 2/3), y aprovecharemos las condiciones

$$q_P = q_Q = -q_R = -q_S$$

con lo que el ejercicio se reduce a una sola ecuación.

ELEMENTO N	X	C.D.G. Y	Z
1	1	1/3	2/3
2	1	2/3	1/3
3	1/3	0	1/3
4	2/3	0	2/3
5	2/3	1/3	1
6	1/3	2/3	1
7	1/3	1	2/3
8	2/3	1	1/3
9	2/3	2/3	0
10	1/3	1/3	0
11	0	1/3	2/3
12	0	2/3	1/3

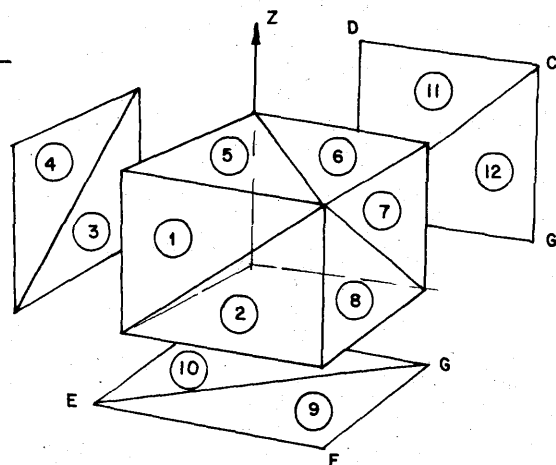


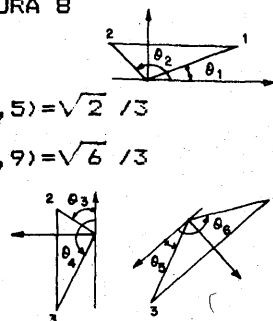
FIGURA 8

#### Distancias

$$r(1,2)=\sqrt{2}/3 \quad r(1,3)=\sqrt{6}/3 \quad r(1,4)=\sqrt{2}/3 \quad r(1,5)=\sqrt{2}/3$$

$$r(1,6)=\sqrt{6}/3 \quad r(1,7)=\sqrt{8}/3 \quad r(1,8)=\sqrt{6}/3 \quad r(1,9)=\sqrt{6}/3$$

$$r(1,10)=\sqrt{8}/3 \quad r(1,11)=1 \quad r(1,12)=\sqrt{11}/3$$



#### Integraciones sobre el propio elemento

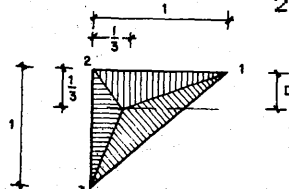
$$\theta_1 = 26.57 ; \quad \theta_1/2 = 13.28 ; \quad \operatorname{tg}(\theta_1/2) = 0.24 ; \quad \ln \operatorname{tg}(\theta_1/2) = -1.44$$

$$\theta_2 = 153.43 ; \quad \theta_2/2 = 76.72 ; \quad \operatorname{tg}(\theta_2/2) = 4.24 ; \quad \ln \operatorname{tg}(\theta_2/2) = 1.44$$

$$I_{12} = (1/3)(1.44 + 1.44) = 0.96$$

$$I_{13} = I_{12}$$

$$\theta_6 = 161.57 ; \quad \theta_6/2 = 80.79 ; \quad \operatorname{tg}(\theta_6/2) = 6.16 ; \quad \ln \operatorname{tg}(\theta_6/2) = 1.82$$



$$\theta = 18.43 ; \theta / 2 = 9.22 ; \operatorname{tg}(\theta / 2) = 0.16 ; \ln \operatorname{tg}(\theta / 2) = -1.82$$

$$I_5 = (1/3 \sqrt{2}) (1.82 + 1.82) = 0.86$$

$$I = 2 \times 0.96 + 0.86 = 1.92 + 0.86 = 2.78$$

### Integraciones numéricas

Como el triángulo es canónico basta ir formando  $D/r$  ya que, para mayor simplicidad se va a proceder a integrar con un sólo punto de Gauss.

ELEMENTO	D	r	$D/r$	$1/r$	$\phi$	$\phi D/r$	q
1	0	0	0	-	300	0	q(P)
2	0	0.47	0	2.12	300	0	q(Q)
3	1/3	0.82	0.61	1.22	167	111.89	0
4	1/3	0.47	3.21	2.13	233	747.93	0
5	1/3	0.47	3.21	2.13	233	747.93	0
6	1/3	0.82	0.61	1.22	167	100.96	0
7	2/3	0.94	0.80	1.06	167	133.60	0
8	2/3	0.82	1.21	1.22	233	281.93	0
9	2/3	0.82	1.21	1.22	233	281.93	0
10	2/3	0.94	0.80	1.06	167	133.60	0
11	1	1	1	1	100	100	q(R)
12	1	$\sqrt{11}/3$	1	0.9	100	100	q(S)

Así pues

$$0.5 \phi (D/r) = 0.67 \times 167 + 233 \times 3.21 + 0.8 \times 167 + 1.21 \times 233 = 1264.97$$

Primer miembro de la ecuación integral

$$1884.96 - 1264.97 = 620$$

Segundo miembro de la ecuación integral

$$q[2.78 + 0.5(2.12 - 1.9)] = 2.89$$

En resumen, el valor predicho es

$$q = 620 / 2.89 = 218 <> 200$$

que, como se ve, compara bien con el teórico.

## 6.ELEMENTOS DE ORDEN SUPERIOR

El procedimiento indicado puede generalizarse sin problemas a elementos de orden superior. Son, por ejemplo, interesantes los elementos parabólicos definidos mediante funciones de forma que

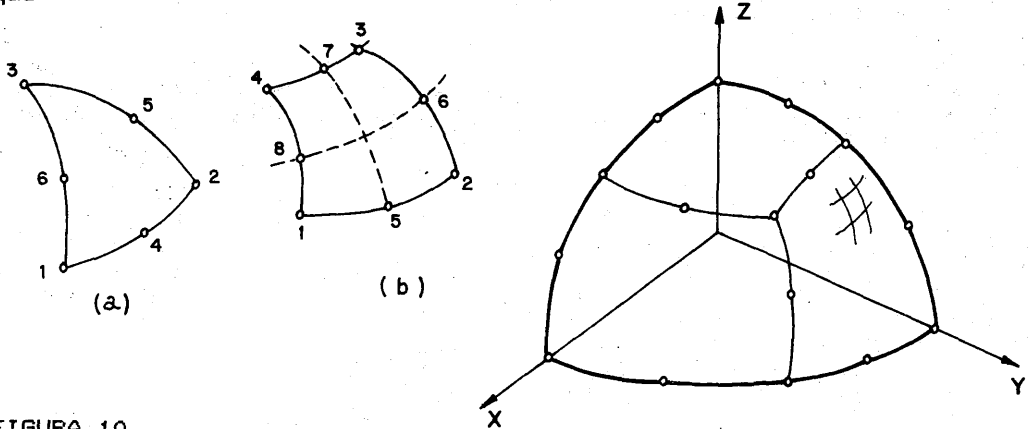


FIGURA 10.

permiten ajustar escamas triangulares o cuadrangulares con las que es posible modelar geometrías complejas. Dentro de cada elemento, la interpolación geométrica es

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N & N & N & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 2 & 3 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & N & N & N & \dots \\ & & & & 1 & 2 & 3 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \sim \\ y \\ \sim \end{bmatrix}^e \quad \dots (26)$$

y de la misma forma se hace

$$\begin{bmatrix} \phi \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N & N & N & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 2 & 3 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & N & N & N & \dots \\ & & & & 1 & 2 & 3 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \sim \\ q \\ \sim \end{bmatrix}^e \quad \dots (27)$$

donde se ha utilizado el símbolo  $\sim$  para indicar los diferentes valores particulares de la variable subrayada en los puntos nodales del elemento.

Antes de continuar conviene hacer notar la aparición del problema de la esquina al que se hizo referencia en el apartado anterior .

Esto es , para nodos angulosos compartidos por elementos distintos , existen normales ( y , por tanto , flujos ) distintos , lo que en el proceso de ensamblaje origina la formación de una matriz B rectangular . La reducción a matriz cuadrada se puede obtener por varios procedimientos . El paralelo al expuesto en el caso plano consistirá en aplicar las condiciones de continuidad en  $\phi$  , a

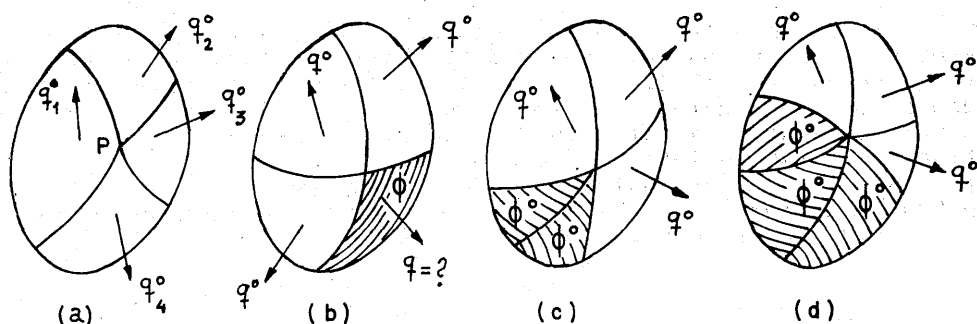


FIGURA 11

menos que exista punto singular , pudiendo distinguirse los siguientes casos

1) Todas las facetas que atacan el vértice en estudio tienen condiciones tipo Neumann ( fig. 11 a ).

Evidentemente , en este caso no existe ningún problema , pues la incógnita es única : el potencial en P , y existe una ecuación de colocación.

2) Todas las facetas menos una tienen condiciones Neumann , y la restante está especificada con un tipo Dirichlet (fig. 11 b.)

Podría determinarse directamente q si se admite la continuidad de  $\phi$  . No obstante , puede dejarse libre el valor de q en el nodo , lo que hace la solución apropiada para los casos en que el flujo se haga infinito .

3) Existen varias escamas ( posiblemente todas ) con condiciones de Dirichlet , y el resto ( ninguna ) con condiciones de Neumann (figura 11 c y d ).

La situación es semejante al caso anterior . El conocimiento de  $\phi$

a lo largo de tres o más líneas en el espacio, permite calcular el gradiente de  $\phi$  y por tanto  $q$  según cada elemento. Si los datos son congruentes y existe la continuidad imaginada, el resultado no depende de las líneas escogidas. En caso contrario, puede producirse la aparición de una singularidad en  $q$ .

Por ello, puede recomendarse una operación análoga a la descrita en el caso plano. Es decir, se puede calcular la orientación del gradiente y dejar libre su módulo para que el programa ajuste los valores adecuados al conjunto. El razonamiento anterior sería válido para elementos lineales, donde los vértices serían de tipo pirámide.

En términos generales puede asegurarse sin embargo, que en los contactos interzonales en medios heterogeneos se produce una singularidad en el flujo, por lo que muchos autores optan por desdoblar la esquina mediante nudos múltiples que permitan el establecimiento de diferentes ecuaciones de colocación y den libertad a las variables afectadas.

En casos de interpolación de orden más elevado aparecen situaciones semejantes en los nodos que se encuentran sobre las aristas de la discretización. (fig. 12).

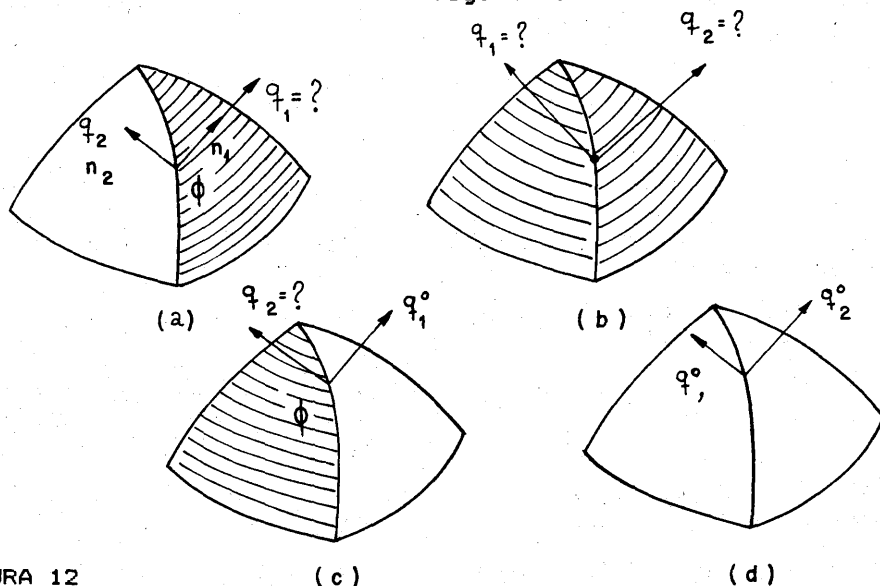


FIGURA 12

Los casos mixtos (a,c) o Neumann puros (d), no presentan problemas. El caso Dirichlet puro admite una solución completamente analoga a las anteriores, si se utiliza la información relativa a la evolución del potencial en los elementos adyacentes.

Con las salvedades introducidas en los apartados anteriores es posible organizar ecuaciones de colocación del tipo

$$c \phi(P) + \left[ \int_{e_1} N_1^* q J, \int_{e_2} N_2^* q J, \dots \right] \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = \left[ \int_{e_1} N_1 \phi^* J, \int_{e_2} N_2 \phi^* J, \dots \right] \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \dots (28)$$

en número igual al de incógnitas del problema, y con ello obtener una ecuación semejante a la (18), que permita despejar los valores desconocidos. En las integrales J es el jacobiano de la transformación isoparamétrica realizada, es decir

$$d(\text{Area}) = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_1} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_2} \right| d\xi_1 d\xi_2 = |G| d\xi_1 d\xi_2 \quad \dots (29)$$

donde

$$|G| = \sqrt{\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ g_1 & +g_2 & +g_3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}$$

$$g_1 = (\partial y / \partial \xi_1 \partial z / \partial \xi_2 - \partial y / \partial \xi_2 \partial z / \partial \xi_1)$$

... (30)

y las semejantes por permutación circular.

Por otro lado, las integrales se realizan en forma numérica según un método normal de Gauss salvo cuando se está integrando sobre el elemento al que pertenece el nodo.

En estos casos puede recurrirse a una integración analítica, como hacen Liggett & Liu [16] para elementos lineales, o se recurre a fórmulas adecuadas que permitan integrar funciones ponderadas por  $1/r$ . Al respecto son de interés las fórmulas desarrolladas por Cristescu y Loubignac [46] que se recogen a continuación.

TABLE 1		Gaussian points			
n		QS 2	QM 2	TS 2	TM 2
1	$x_1$	0.	0.	0.	0.
	$y_1$	1.03942 12765 68581 3010	0.65686 56697 79974 52614	1.	0.43233 71805 51 738 63995
2	$x_1 = -x_4$ $x_2 = -x_3$ $x_3$ $x_4$	.39185 32372 07723 25912 .60267 88436 56348 40186	0.44855 80816 50905 98878 0.57322 58320 82520 56753	0.12017 15546 03668 25471 0.44848 63474 05427 54390	0.38441 23095 94197 03339 0.29198 02462 09846 66574
	$y_1 = y_4$ $y_2 = y_3$	1.79623 91900 54522 1470 0.49185 61814 88659 98115	1.45407 34599 90609 7562 0.26594 65932 72770 32575	1.57735 02691 89625 7645 0.42264 97308 10374 23549	1.13989 66883 82344 3255 0.20271 83188 72280 98272
	$x_1$ $x_2$ $x_3$ $x_4$ $x_5$ $x_6$ $x_7$ $x_8$ $x_9$	$-x_3$ 0. .67708 43774 93325 68422 $-x_6$ 0. .97094 45246 12204 25563 0. .85006 83475 45629 78957	$-x_3$ 0. 0.74772 76161 85646 92702 $-x_6$ 0. 0.77589 19935 99697 39305 $-x_9$ 0. 0.72502 54287 47875 62483		
	$y_1 = y_3$ $y_2 = y_6$ $y_4 = y_6$ $y_5$ $y_7 = y_9$ $y_8$	0.23066 85599 30722 77540 1.12704 57197 95890 1959 2.12678 08524 48402 8209 2.1844 08015 10911 4248 1.26496 93364 99514 5283 .27693 21275 71838 50387	0.84529 16918 21320 24015 0.87119 44991 32481 08504 1.73217 86115 89251 0650 1.71964 09285 73639 2468 0.15427 39864 23690 07999 0.14090 88621 10141 05324		

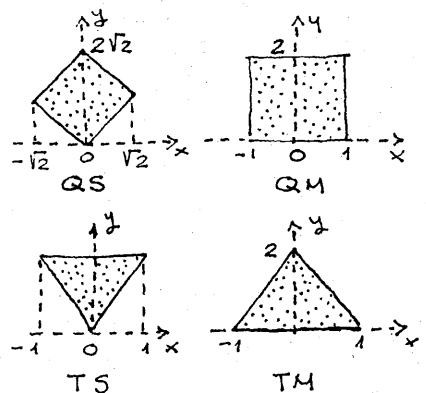


TABLE 2		Gaussian weights			
n	w	QS 2	QM 2	TS 2	TM 2
1	$w_1$	3.52549 43480 78172 1009	4.81211 82505 96034 4750	1.92484 73002 38413 7900	3.44327 15277 12032 3111
2	$w_1 = w_4$ $w_2 = w_3$	0.73998 11386 80832 29035 1.2276 60353 58193 7601	0.79164 47625 50937 03791 1.61441 43627 47080 1996	0.48121 18250 59603 44750 $= w_1$	0.42181 94293 35080 69274 1.29981 63345 20935 4632
	$w_1 = w_3$ $w_2 = w_4$ $w_5$ $w_6 = w_9$ $w_8$	0.05532 54866 34940 54677 0.86074 02458 69318 59896 0.05860 43047 99897 54426 0.41241 62147 25489 77237 0.47772 26297 84281 66034 1.06903 30450 45124 2268	0.49133 68239 75028 49282 0.84924 85897 61410 34920 0.19429 02538 24050 50432 0.34350 83882 77004 06498 0.36769 44383 31076 27578 1.51271 82402 97309 5150		



## 7. TRATAMIENTO DE LAS INTEGRALES DE VOLUMEN

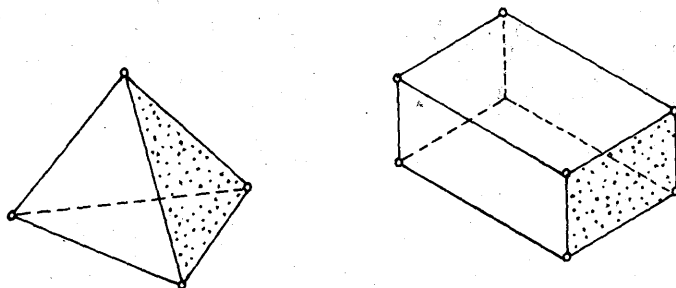
Hasta ahora se ha venido prescindiendo del término

$$\int_{\Omega} f(Q) \frac{1}{r(P,Q)} dv(Q) \quad \dots (31)$$

que surge al final de la ecuación 4, con objeto de evitar la aparición de incógnitas en el dominio.

En un problema de Poisson la integral (31) es, sin embargo, inevitable y debe ser calculada para todos y cada uno de los puntos P de colocación. Obsérvese que, en la expresión subintegral, no existen incógnitas y, por tanto, el problema se reduce al de una cubatura.

En general cabe recurrir al uso de celdas, por ejemplo tetraédricas (fig.13), definidas en el dominio, y sobre ellas realizar cubaturas numéricas tipo Gauss.



CELDA DE INTEGRACION

FIGURA 13

No cabe duda que con ello se pierde en buena medida el atractivo principal del método, es decir la posibilidad de conseguir una malla en una dimensión inferior a la del dominio. Por ello conviene recopilar algunos casos particulares en que es posible el cálculo de la integral 32 sin necesidad de las precisadas celdas.

La situación mas sencilla corresponde evidentemente al caso en que

$$f=C = \text{constante} \quad \dots (32)$$

pues

$$I = C \int_{\Omega} \frac{dv(Q)}{r(P, Q)} \quad \dots (33)$$

Pasando a coordenadas polares , con  $dv = r^2 \sin \psi \, d\psi \, dr \, d\theta$

$$I = C \int_{\Omega} r \sin \psi \, d\psi \, d\theta \, dr = C \int_{\partial\Omega} (R^2 / 2) \sin \psi \, d\psi \, d\theta$$

donde  $R$  describe la superficie en coordenadas esfericas , con centro en el punto  $P$  del contorno desde donde se realiza la integracion . Pero el doble de la cantidad subintegral anterior es el area  $dS'$  encerrada por una escama de superficie esferica de radio  $R$  ,

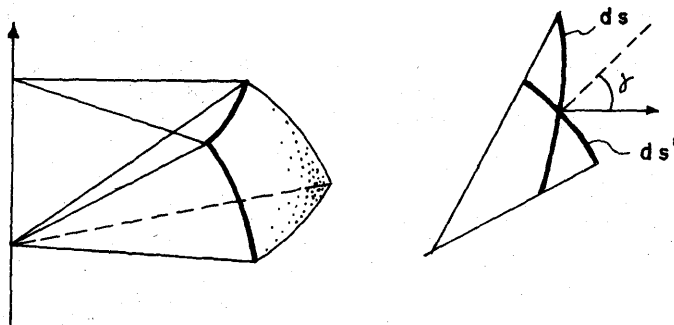


FIGURA 14

y como

$$dS' = dS \cos \gamma \quad \dots (34)$$

siendo  $dS$  el area del contorno real , es posible escribir

$$I = (C/2) \int_{\partial\Omega} \cos \gamma \, dS = (C/2) \int_{\partial\Omega} [(r \cdot \underline{n}) / r] dS = (CD/2) \int_{\partial\Omega} dS/r \quad \dots (35)$$

con lo que la integral se ha reducido al contorno donde puede calcularse de la misma forma que se explico anteriormente .

Otros casos de interés corresponden a la aparición de focos puntuales

$$f = F \delta_{\underline{x}-\underline{a}} \quad \dots (36)$$

y así

$$I = F/r(P, M) \quad \dots (37)$$

donde M es el punto de coordenadas a

Si existen focos lineales es posible también reducir la integral a expresiones semejantes a la (37) donde F tiene ahora el significado de potencia por unidad de longitud

$$I = \int_T F(\chi) / r(P, M) \quad M \in T \quad \dots (38)$$

Casos semejantes al anterior aparecen en teoría de la elasticidad donde representan respectivamente el peso propio y cargas puntuales o cargas por unidad de longitud interiores al dominio.

En las condiciones anteriores puede demostrarse que es posible reducir al contorno las integrales volumétricas con fuerzas derivables de un potencial, como la fuerza centrífuga o las cargas térmicas.

## 8. EJEMPLO

Para terminar se presentan dos ejemplos desarrollados por J.J. ANZA [31], donde pueden verse consideraciones adicionales a todo lo que llevamos expuesto hasta ahora.

Se trata de estudiar (fig. 15 a) un cilindro hueco sometido a

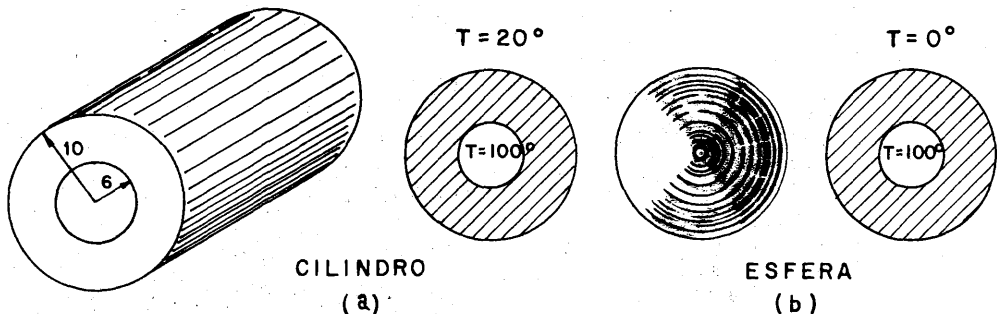


FIGURA 15

temperaturas diferentes en sus contornos interior y exterior. Utilizando las propiedades de simetría se ha realizado la discretización con elementos constantes indicada en la figura 16 donde las condiciones de contorno son



Elementos 1 a 48 : flujo nulo

Elementos 49 a 56 : temperatura dada

La figura 17 recoge la comparación de las soluciones teorica y numérica que , como se ve , es excelente.

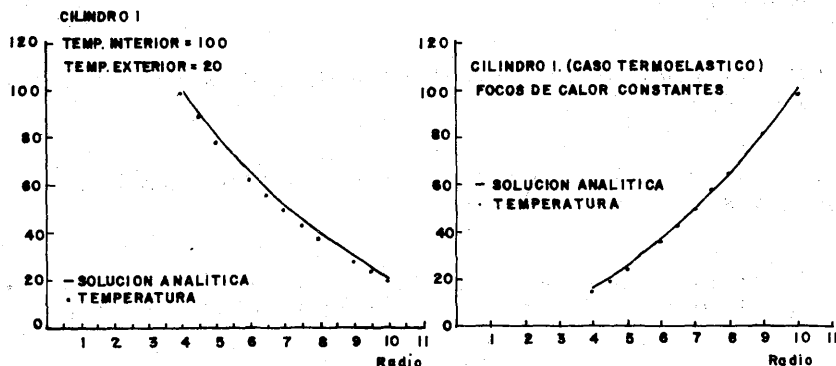


FIGURA 17

En 17.b se recoge el caso  $T = k r^2$ , es decir , la existencia de focos de calor de intensidad de emisión -  $4k$  , pudiendo observarse de nuevo la precisión de los resultados .

Igualmente , la figura 18 recoge la discretización para la esfera del caso de la figura 15 b. , pudiendo observarse en la figura 19

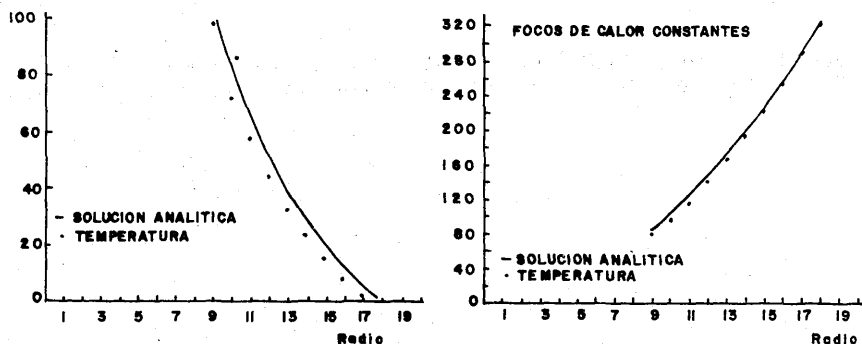


FIGURA 19

la precisión de los resultados obtenidos tanto en el caso lineal (fig. 19 a) como en el caso del campo creado por focos uniformemente distribuidos , de intensidad de emisión -6 .

Algunos ejemplos adicionales , relativos al comportamiento de elementos convectivos puede verse en la referencia [31] ya citada o en Anza et al.[43] , dentro de un contexto mas amplio.

## EJERCICIOS

1) Desarrollar el ejemplo del apartado 5 utilizando 4 puntos de integracion por cara.

2) Preparar una fórmula de integración semejante a la (25) para un dominio rectangular.

3) Resolver el ejemplo del apartado 5 mediante la fórmula del ejercicio 2 y la aplicación de una cuadratura bidimensional del tipo

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_i w_i \sum_j w_j f(\xi_i, \eta_j)$$

donde  $w_i$  y  $\xi_i$  se obtengan de la tabla indicada en el capitulo 4.

4) Obtener una formula (38) explícita para el caso en que  $\Gamma$  sea una recta.

5) Analizar la posibilidad de tratar focos de calor distribuidos en superficies contenidas en el interior del dominio en estudio.

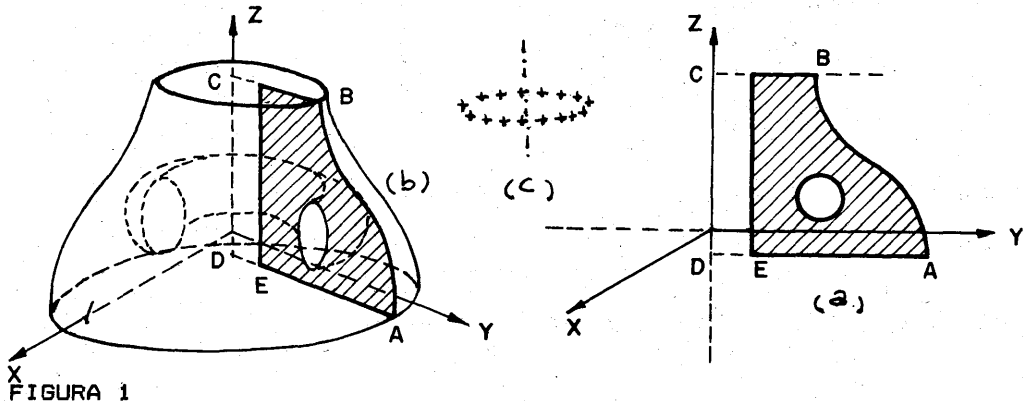
## CAPITULO VI

### PROBLEMAS CON SIMETRIA DE REVOLUCION

En lo que sigue van a tratarse geometrías y condiciones de contorno simétricas alrededor de un eje. Esta propiedad permite reducir la discretización en una dimensión adicional a la intrínseca del método, por lo que bastará utilizar elementos del tipo indicado en el capítulo IV, con la salvedad que la solución fundamental es distinta. Tras presentar la formulación específica, se indicará el tratamiento de problemas anisótropos y se expondrá algún ejemplo de aplicación, donde aparece una condición de contorno de tipo derivada oblicua.

#### 1. LA ECUACION BASICA

Este capítulo va a tratar sobre cuerpos engendrados por una sección ABCD (fig. 1 a) al girar alrededor de un eje, sometidos a solicitaciones igualmente simétricas.



Dada su carácter tridimensional , el análisis podría realizarse mediante las técnicas expuestas en el capítulo anterior y , de hecho , así se ha procedido con los ejercicios indicados en el apartado final .

Cabe pensar , sin embargo , en la utilización de una solución fundamental tipo anular (fig 1 c) que englobe dichas condiciones de simetría , por lo que sólo deberían ser ajustadas las características geométricas de la sección meridiana .

Puesto que , en los problemas prácticos , existen numerosas ocasiones en que estas condiciones se cumplen , es interesante plantear la situación ex-novo .

Según se ha dicho mas arriba , una solución fundamental correspondiente a un anillo anular de focos , sería la alternativa lógica . Es usual , sin embargo , proceder por integración directa en las ecuaciones tridimensionales de la forma siguiente.

La ecuacion tridimensional

$$c \phi + \int_{\partial \Omega} \phi [d(1/r)/dn] ds = \int_{\partial \Omega} (1/r) q ds \quad \dots (1)$$

es interpretada a la luz de la geometria particular (fig. 2)

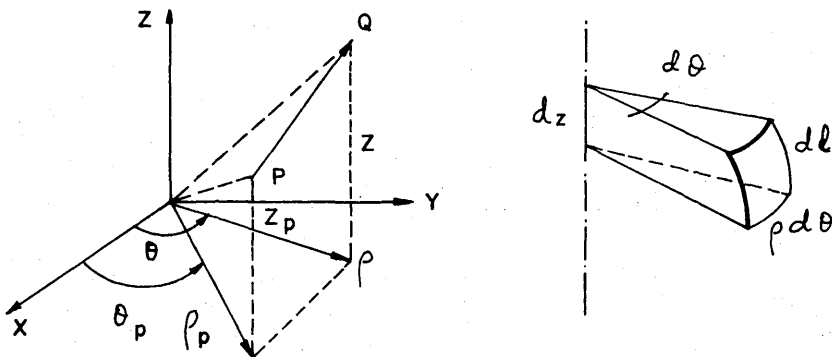


FIGURA 2

donde

$$r(P,Q) = \sqrt{\rho^2 + \rho_P^2 - 2\rho\rho_P \cos(\theta - \theta_P) + (z - z_P)^2} \quad \dots (2)$$



y

$$ds = \rho \, d\theta \, dl \quad \dots (3)$$

Puesto que

$$\begin{aligned} \phi &= \phi(\rho, z) \\ q &= q(\rho, z) \end{aligned} \quad \dots (4)$$

conviene poner la ecuación (1) tras realizar la integración parcial en  $\theta$ . Se tiene así

$$c \, \phi(P) + \int_{\Gamma} \phi(\rho, z) \, \rho \, dl \left\{ \int_0^{2\pi} [d(1/r)/dn] d\theta \right\} = \int_{\Gamma} [d\phi/dn] \, \rho \, dl \left[ \int_0^{2\pi} (1/r) \, d\theta \right] \quad \dots (5)$$

Si se define ahora

$$\phi^* = \int_0^{2\pi} (1/r) d\theta \quad ; \quad q^* = (d\phi^*/dn) \quad \dots (6)$$

la ecuación básica del MEC en el caso axisimétrico pasa a ser

$$c \, \phi(P) + \int_{\Gamma} \phi \, q^* \, \rho \, dl = \int_{\Gamma} q \, \phi^* \, dl \quad \dots (7)$$

donde  $\Gamma$  es la curva meridiana.

Como se vé, el problema ha quedado planteado en forma semejante al del cuerpo bidimensional, por lo que tan sólo se precisa analizar (6) para recaer en cuestiones conocidas.

Utilizando la fórmula (2) la ecuación (6) se escribe, para  $\theta = \theta_P$

$$\phi^* = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{\rho^2 + \rho_P^2 + (z - z_P)^2 - 2\rho\rho_P \cos \theta}} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{a - b \cos \theta}}$$

$$a = \rho^2 + \rho_P^2 + (z - z_P)^2$$

$$b = 2\rho\rho_P \quad \dots (8)$$

El resultado de (8) se puede expresar en función de integrales elípticas o funciones de Legendre de segunda especie

$$\phi^* = \frac{2 Q_{-1/2}(\gamma)}{\sqrt{\rho \rho_P}} \quad \dots (9)$$

donde

$$\gamma = 1 + \frac{(\rho - \rho_P)^2 + (z - z_P)^2}{2 \rho \rho_P} \quad \dots (10)$$

Asimismo, la derivada respecto a la normal se escribe

$$\begin{aligned} \frac{d\phi^*}{dn} = & \frac{2}{r\sqrt{\rho\rho_P}} \left\{ \left[ -\frac{Q_{-1/2}(\gamma)}{2} + \frac{\rho - \rho_P - (z - z_P)^2}{2\rho\rho_P} \frac{dQ_{-1/2}(\gamma)}{d\gamma} \right] r_{,n} + \right. \\ & \left. + \left[ \frac{(z - z_P)}{r_P} \frac{dQ_{-1/2}(\gamma)}{d\gamma} \right] z_{,n} \right\} \quad \dots (11) \end{aligned}$$

## 2.ELEMENTOS DE CONTORNO

Puesto que la discretizacion se limita a la curva meridiana

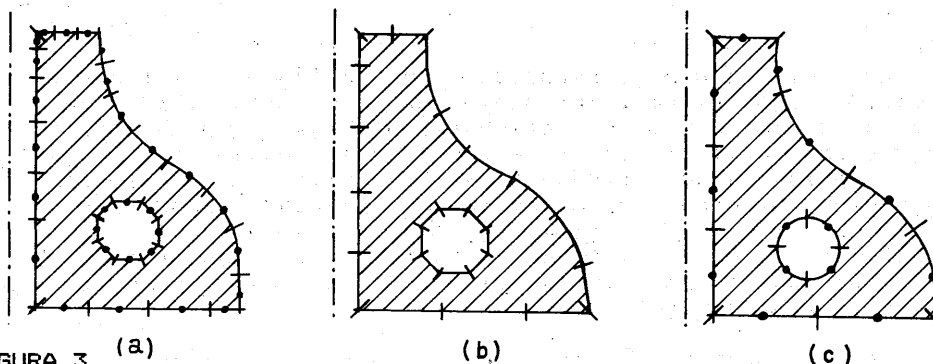


FIGURA 3 (a)

(b)

(c)

puede ser utilizada toda la gama de elementos sugerida en el capitulo IV : constantes (fig. 3a) , lineales (fig. 3b) , parabólicos (fig. 3c ) etc.

El caso mas sencillo corresponde a la elección de elementos constantes en los que se aproximan  $\phi$  y  $q$  mediante valores constantes tomando como punto de colocación el centro de cada elemento .

Asi , la ecuacion (7) es aproximada mediante

$$c \phi(P) + \sum_e \phi_j \int_j q^* \rho \, dl = \sum_e q_j \int_j \phi^* \rho \, dl \quad \dots (12)$$

y la aplicación sucesiva de (12) a todos los elementos conduce al sistema

$$c \phi_i + \sum_{ij} A_{ij} \phi_j = \sum_{ij} B_{ij} q_j \quad \dots (13)$$

donde las integrales a calcular son

$$A_{ij} = \int_{\Gamma_j} q_{ij}^* \, dl$$

$$B_{ij} = \int_j \rho \phi_{ij}^* dl \quad \dots (14)$$

Siguiendo el camino bosquejado en capítulos anteriores se distinguen dos situaciones segun el punto de colocación esté contenido o no dentro del elemento sobre el que se realiza la integración. Ello es debido a que, en el primer caso  $\gamma \rightarrow 1$  y  $Q_{-1/2}(\gamma)$  presenta una singularidad logarítmica, por lo que la integración numerica tipo Gauss solo es adecuada cuando  $i \neq j$ .

En cualquier caso, la integración se realiza asimilando  $Q_{-1/2}$  a una aproximación polinómica del tipo de las propuestas por Abramovitz y Stegun [46].

En el caso en que  $i = j$ , se deja explícito el factor logarítmico y se aplican las formulas de Stroud, como patrocinan Ligget y Liu [16], o se acude a un procedimiento mixto [43] en que el elemento se subdivide en dos trozos: en la parte mas próxima al nodo se utiliza la aproximación logarítmica y se integra analíticamente, mientras en el resto se aplica la cuadratura numerica.

Evidentemente ambos recursos son semejantes.

El término  $c$  se puede calcular mediante el procedimiento habitual pero su significado se obtiene fácilmente si recordamos la formula (9) del capítulo anterior

$$c = -2\theta_i \quad \dots (15)$$

donde  $\theta_i$  es el ángulo interior definido por los segmentos adyacentes al punto en estudio.

### 3. MEDIOS ANISOTROPOS

Hasta ahora se ha supuesto que se trataba con problemas en los que existía homogeneidad (o heterogeneidad a trozos, capítulo VII) e isotropía; es decir, las propiedades del medio no dependen de la dirección quer se considere. En caso contrario, la ecuación de Laplace debe escribirse

$$k_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad \dots (16)$$

donde  $k_x, k_y$  y  $k_z$  son 'permeabilidades' (piénsese por ejemplo, en un problema de filtración)

Es posible disponer de soluciones fundamentales que recojan esta anisotropía. El medio habitual de resolución suele ser, sin embargo, un cambio geométrico del dominio, que permita reducir (16) a un problema de Laplace del tipo de los contemplados mas arriba.

En el caso anterior, el cambio

$$\begin{aligned} x^* &= x \\ y^* &= \sqrt{k_x / k_y} \, y \\ z^* &= \sqrt{k_x / k_z} \, z \end{aligned} \quad \dots (17)$$

permite escribir, por ejemplo,

$$\begin{aligned} \partial \phi / \partial y^* &= (\partial \phi / \partial y^*) (dy^* / dy) = (\partial \phi / \partial y^*) \sqrt{(k_x / k_y)} \\ \partial^2 \phi / \partial y^{*2} &= (\partial^2 \phi / \partial y^{*2}) (k_x / k_y) \end{aligned} \quad \dots (18)$$

e, igualmente,

$$\partial^2 \phi / \partial z^{*2} = (\partial^2 \phi / \partial y^{*2}) (k_x / k_z) \quad \dots (19)$$

con lo que (16) se reduce a

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^{*2}} = 0 \quad \dots (20)$$

que es la ecuación deseada.

Para completar la analogía es preciso además tener en cuenta el cambio en las condiciones de contorno tipo Neumann, puesto que en ellas aparece explícitamente la geometría al derivar respecto a la normal al contorno y en el flujo físico intervienen las

permeabilidades.  
Así

$$q_n = \left( k_x \frac{\partial \phi}{\partial x}, k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \begin{bmatrix} n \\ x \\ y \end{bmatrix}$$

$$q_n^* = \left( k_x^* \frac{d\phi}{dx^*}, k_y^* \frac{d\phi}{dy^*} \right) \begin{bmatrix} n^* \\ x^* \\ y^* \end{bmatrix}$$

... (21)

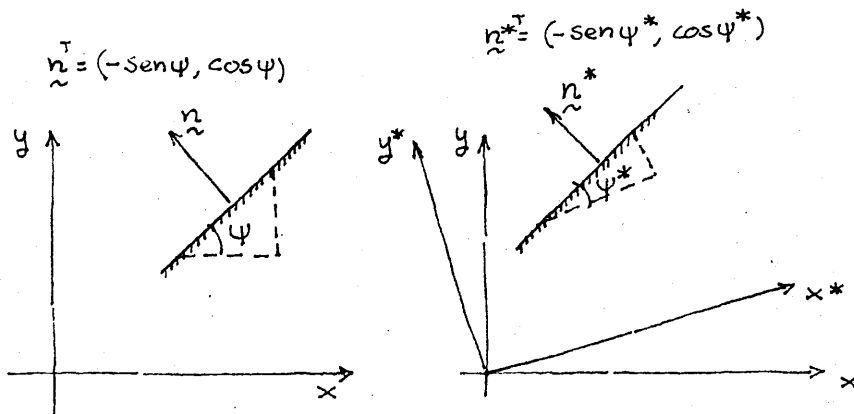


FIGURA 4

De la figura 4 y las formulas 17 es evidente que

$$\operatorname{tg} \psi = dy/dx$$

$$\operatorname{tg} \psi^* = (dy^*/dx^*) = \left( \sqrt{\frac{k_x}{k_y}} \right) \operatorname{tg} \psi$$

... (22)

de modo que el flujo en el sistema original es

$$q_n = -k_x \left( \frac{d\phi}{dx} \right) \operatorname{sen} \psi + k_y \left( \frac{d\phi}{dy} \right) \cos \psi =$$

$$= k_y \cos \psi \left( -\sqrt{\frac{k_x}{k_y}} \operatorname{tg} \psi^* \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \quad \dots (23)$$

A su vez

$$\begin{aligned} q_n^* &= k_x \left[ -\left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \operatorname{sen} \psi^* + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \cos \psi^* \right] = \\ &= k_x \sqrt{\frac{k_y}{k_x}} \cos \psi^* \left[ -\sqrt{\frac{k_x}{k_y}} \operatorname{tg} \psi^* \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right] \quad \dots (24) \end{aligned}$$

Dividiendo ambas ecuaciones

$$\frac{q_n}{q_n^*} = \frac{\sqrt{\frac{k_y}{k_x}} \cos \psi}{\cos \psi^*} = \frac{\sqrt{\frac{k_y}{k_x}}}{\cos \psi^*} \sqrt{\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \psi^*}{1 + \left( \frac{k_y}{k_x} \right) \operatorname{tg}^2 \psi^*}} \quad \dots (25)$$

o bien, utilizando 22

$$\frac{q_n}{q_n^*} = \sqrt{\frac{k_y}{k_x}} \sqrt{\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \psi^*}{1 + \left( \frac{k_y}{k_x} \right) \operatorname{tg}^2 \psi^*}} \quad \dots (26)$$

La formula 26 nos permite poner la condición  $q^*$  en el contorno transformado cuando  $q$  es el dato u obtener  $q$  a partir de las  $q^*$  tras resolver el problema.

Una aplicación de las ideas anteriores que pasamos a resumir a continuación puede verse en [43].

El problema es interesante pues aparece también una condición de contorno de tipo derivada oblicua como se había anunciado.

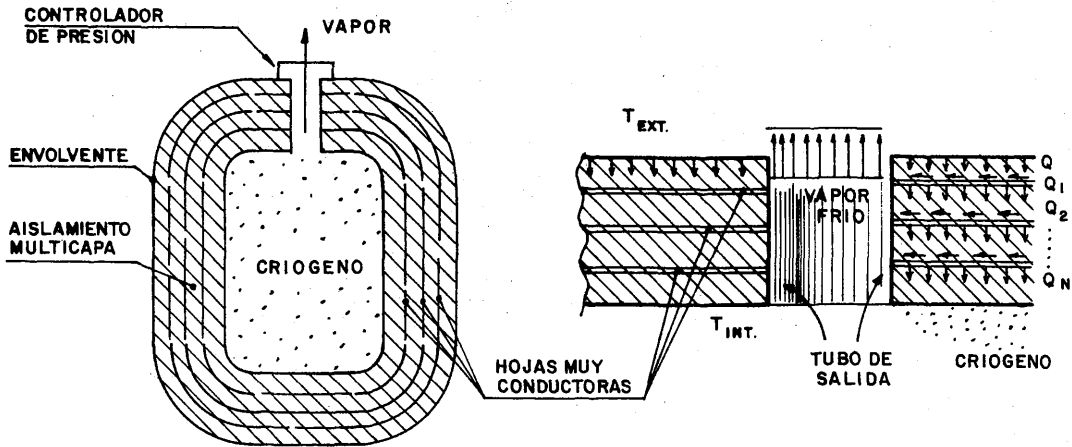


FIGURA 5

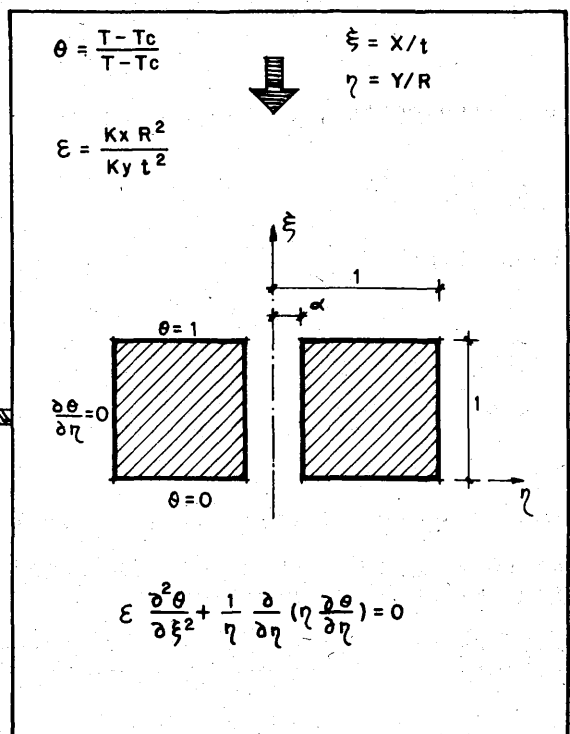
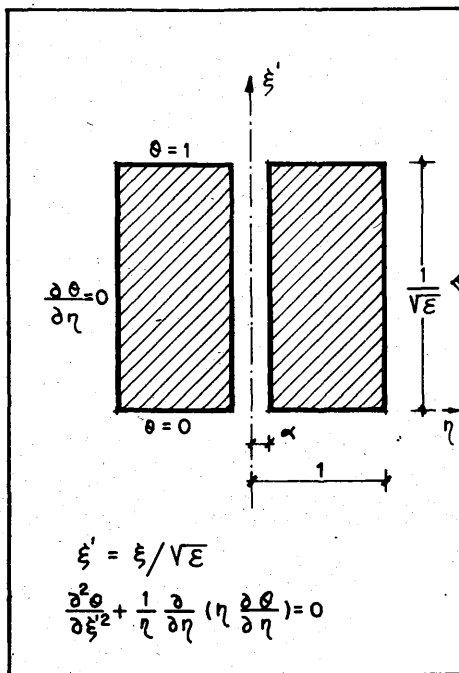
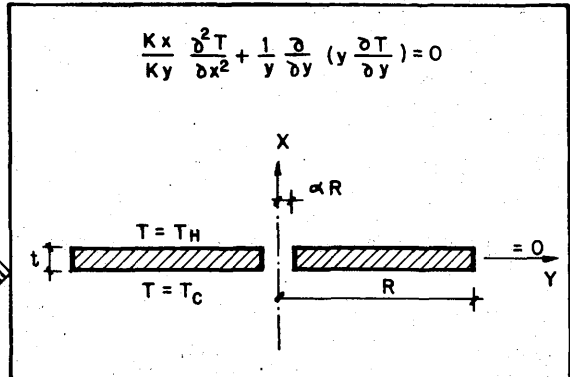
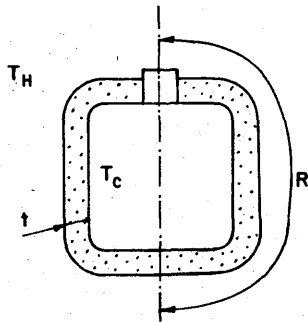
La situación física corresponde a la evaporación de criógenos en recipientes DEWAR con un aislamiento estratificado, lo que produce una ortotropía de conductividad en las proximidades de la boca de salida.

Las diferentes etapas del cálculo se recogen en la figura 6. En primer lugar se asimila el problema al caso (6.b) regido por la ecuación

$$\frac{k_x}{k_y} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left( y \frac{\partial T}{\partial y} \right) = 0 \quad \dots (27)$$

con las condiciones de contorno allí indicadas.





Acto seguido se realiza una normalización de la geometría y de las condiciones de contorno mediante los cambios

$$\Theta = (T - T_C) / (T_H - T_C)$$

$$\xi = k_x \frac{R^2}{x} / k_y \frac{t^2}{y}$$

$$\xi = x / t$$

$$\eta = y / R$$

... (28)

lo que permite escribir la ecuación de comportamiento como

$$\xi \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \right) = 0$$

... (29)

y, finalmente, el cambio

$$\xi' = \xi / \sqrt{\xi}$$

... (30)

conduce a

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi'^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \right) = 0$$

... (31)

que ya admite el tratamiento habitual.

En este caso, debido a la geometría del problema, la condición tipo Neumann no se altera.

Finalmente, la condición de contorno en la boca de salida se establece en la forma siguiente. (Fig 7)

Se supone

$$a) \quad T(x) = T(x, y) \quad ; \quad y=R \quad \dots (32)$$

b) no hay convección

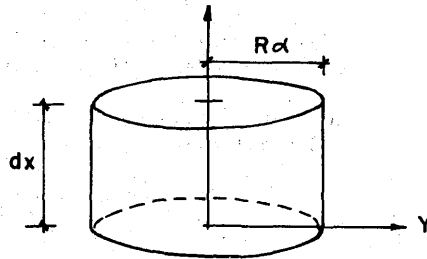


FIGURA 7

La entrada de calor por unidad de tiempo a través de las paredes es

$$2\pi R \cdot dx \cdot k \quad \frac{\partial T}{\partial y} \quad ; \quad y=R \quad \dots (33)$$

mientras que el calor transportado a lo largo del tubo es

$$m \cdot c \quad \frac{\partial T}{\partial x} \quad dx \quad \dots (34)$$

siendo

$c$  el calor específico del fluido

$p$

$m$  la velocidad de evaporación del criogeno (kg/seg)

$y$

En la situación estacionaria, la igualación de (33) y (34) produce así

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=R} = \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{y=R}$$

$$\mu = \frac{m}{y} \frac{c}{p} \frac{1}{2\pi\alpha R k} \quad \dots (35)$$

que es la anunciada condición tipo 'derivada oblicua'

Evidentemente esta condición debe modularse en forma congruente con los cambios de coordenadas indicados anteriormente.

Para ver con qué facilidad es incorporada dicha condición al método, se volverá de nuevo a la ecuación 7

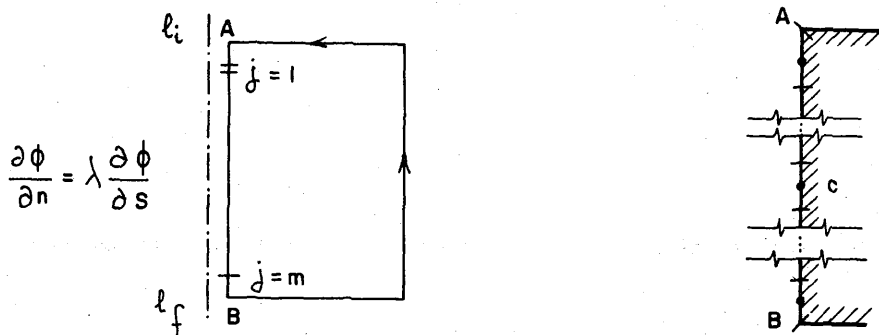


FIGURA 8

El segundo miembro es, en el borde AB del tubo de salida

$$I = \int_{\Gamma_0} \rho q \phi^* dl = \int_{\Gamma_0} \lambda \rho q \phi^* (d\phi/ds) dl = \lambda \int_{\Gamma_0} \phi^* q \rho (d\phi/dl) dl \quad \dots (36)$$

donde se han hecho coincidir s y l.

Una integración por partes produce

$$I = \left\{ \rho \phi^* \phi \right\}_{l_i}^{l_f} - \int_{\Gamma_0} \phi [d(\phi^* \rho)/dl] dl \quad \dots (37)$$

Si ahora se introduce la hipótesis de elementos constantes, con M elementos

$$I = \rho \phi^* \begin{matrix} |1 \\ |f \\ |1 \\ |i \end{matrix} - \sum_{j=1}^M \phi_j \int_j [d(\phi^* \rho) / dl] dl \quad \dots (38)$$

Es decir

$$I = \rho \phi^* \begin{matrix} |1 \\ |f \\ |1 \\ |i \end{matrix} - \sum_{j=1}^M \phi_j^* \begin{matrix} |1 \\ |jfin \\ |1 \\ |jin \end{matrix} \rho \begin{matrix} |1 \\ |jfin \\ |1 \\ |jin \end{matrix} \quad \dots (39)$$

o bien

$$I = - \sum_{j=2}^{M-1} \phi_j \phi^* \begin{matrix} |1 \\ |jfin \\ |1 \\ |jin \end{matrix} + \phi_j \phi^* \begin{matrix} |1 \\ |i \end{matrix} - \phi_j \phi^* \begin{matrix} |1 \\ |fin \end{matrix} \quad \dots (40)$$

El elemento que arranca de A produciría una contribución a la matriz general

$$(A_{jA} + \lambda \phi^* \begin{matrix} |1 \\ |i \end{matrix}) \phi_A \quad \dots (41)$$

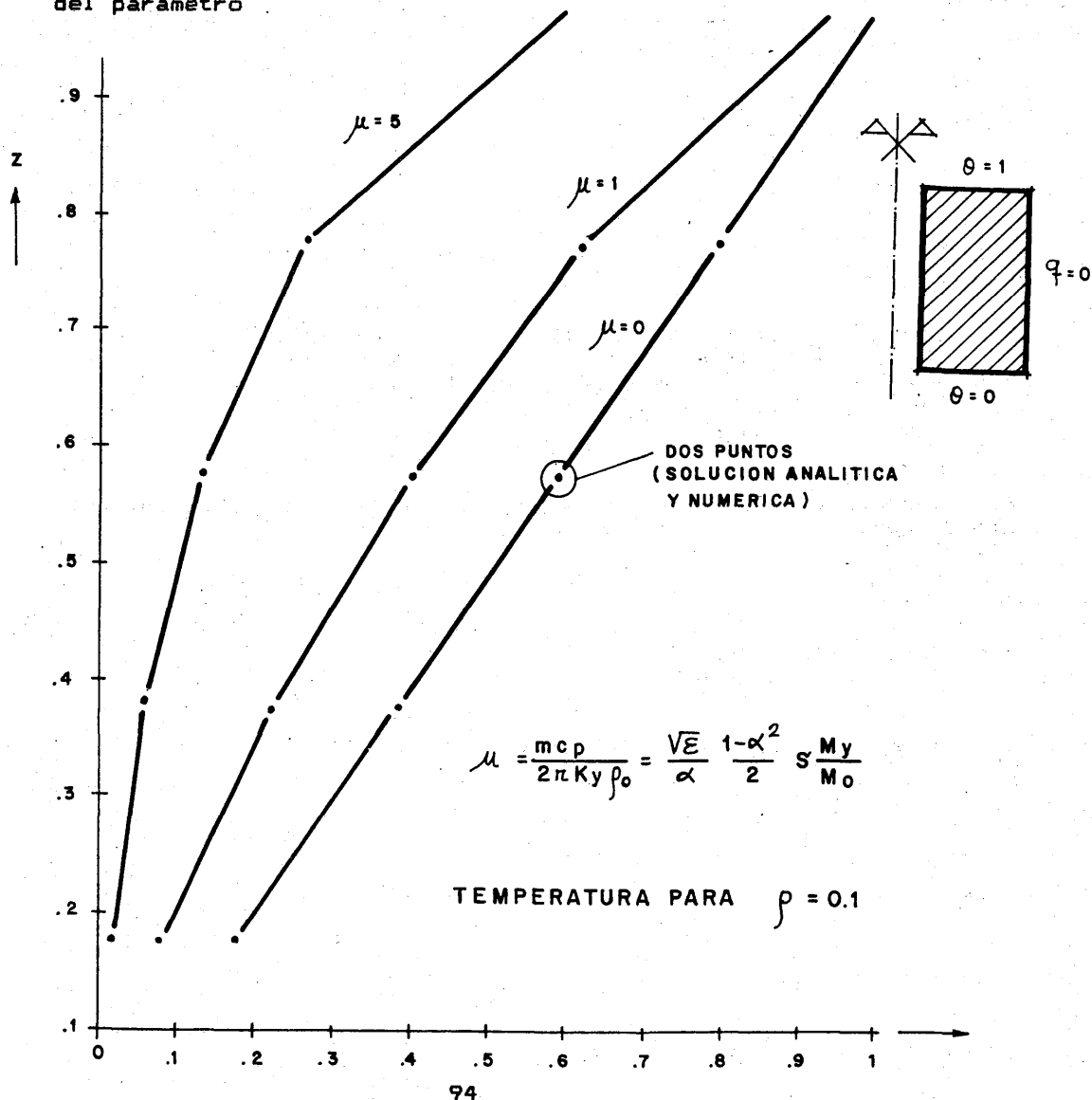
El elemento que contiene a B sería

$$(A_{jB} - \lambda \phi^* \begin{matrix} |1 \\ |f \end{matrix}) \phi_B \quad \dots (42)$$

y un nodo intermedio C contribuiría con

$$[A_{jC} + \lambda(\phi^*_{jfin} - \phi^*_{jin})] \phi_C \quad \dots (43)$$

Como ejemplo de aplicación de la técnica anterior se muestran en la figura 49 algunos resultados obtenidos para diferentes valores del parámetro



## EJERCICIOS

1. Obtener la solución fundamental directamente , a partir de una corona de fuentes .
2. Discutir la posibilidad de elementos de orden superior y el tratamiento correspondiente a nodos situados en el eje de simetría
3. Desarrollar fórmulas para el tratamiento de las integrales de volumen que aparecen en el caso de fuentes anulares , superficiales , o uniformemente distribuidas en el volumen .
4. Modificar el programa de ordenador del apéndice para que admita problemas con simetría de revolución en forma alternativa a los planos .
5. Discutir la posibilidad de tratamiento de condiciones asimétricas mediante desarrollo en serie de armónicos , en forma semejante al método utilizado con elementos finitos .

## CAPITULO VII

### TEMAS ADICIONALES

En este capítulo se recogen tres temas complementarios a los desarrollados anteriormente . Primero se bosqueja el tratamiento de medios heterogéneos a trozos , a continuación se describe el acoplamiento con elementos finitos y , finalmente , se introduce la idea de elementos adaptables .

Se trata simplemente de indicar algunos campos de interés que complementen la información pretendida con este manual . Campos adicionales como fenómenos transitorios , no linealidades , problemas de contorno libre , etc . deben ser consultados en bibliografía adicional .

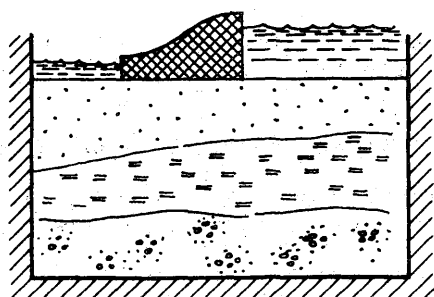
En particular , el problema del análisis de fenómenos transitorios ha ocupado un puesto importante en los últimos tiempos debido al interés que presenta tanto en problemas de potencial como en su acoplamiento con problemas elásticos.

#### 1. MEDIOS HETEROGENEOS A TROZOS

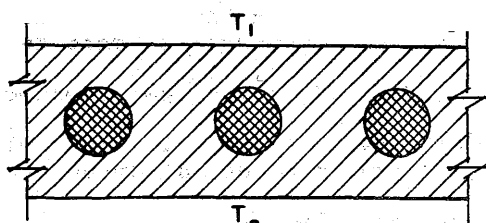
La validez de la solución fundamental como artificio para conseguir reducir la discretización al contorno , está limitada por la homogeneidad e isotropía del material ocupante del dominio en estudio .

Un caso común se presenta al tratar con medios estratificados o con inclusiones , figura 1 , donde la heterogeneidad se presenta en forma de regiones con propiedades características distintas pero uniformes dentro de cada una de ellas .





(a)



(b)

FIGURA 1

El planteamiento adecuado consiste en definir como contornos activos las interfases entre regiones, y su subdivisión en elementos. Por cada interfase existen dos incógnitas: tanto el flujo como el potencial, pero también la posibilidad de colocar la fórmula de representación en dos subregiones, por lo que es posible la resolución del problema. Puntos conflictivos aparecen en las zonas de coincidencia de mas de dos regiones, debido a las singularidades presentes, lo que en el caso de elementos con nodos en los extremos, conduce a una casuística complicada que puede evitarse simplemente desplazando los nodos (según se indicó en el capítulo 1) a costa de aumentar el número de ecuaciones.

Para fijar ideas imagine el caso de la figura 2 donde existen

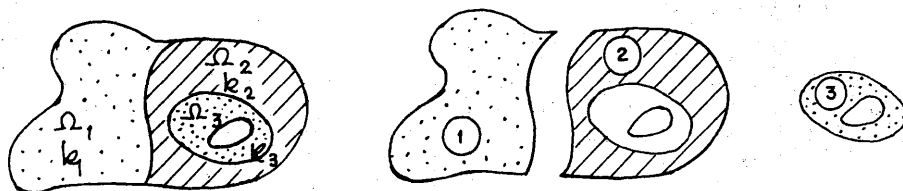


FIGURA 2

tres subregiones con características diferentes  $k_1$ ,  $k_2$  y  $k_3$ .

Para la region  $\Omega_1$  se tiene

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ A & A \\ 11 & 12 \\ 1 & 1 \\ A & A \\ 21 & 22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \phi \\ 1 \\ \phi \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ B & B \\ 11 & 12 \\ 1 & 1 \\ B & B \\ 21 & 22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ q \\ 1 \\ 1 \\ q \\ 2 \end{bmatrix} \quad \dots (1)$$

donde A y B son las matrices de influencia y los superíndices se refieren al dominio donde se trabaja mientras que los subíndices indican interfases o zonas del contorno.

Así  $A_{12}$  indica los coeficientes que se obtienen cuando, trabajando en la región 1 se están escribiendo las ecuaciones correspondientes a polos situados en el contorno libre de 1 y elementos en la interfase 1-2, mientras que  $A_{22}$  se refiere a la situación de polos y elementos en la interfase pero trabajando en 1.

Para la subregión 2, en forma analoga

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ A & A & A \\ 11 & 12 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ \phi \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ B & B & B \\ 11 & 12 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ q \\ 2 \end{bmatrix} \quad \dots (2)$$

Finalmente, la aplicación de la fórmula de representación al dominio (3) conduce a

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ A & A & A \\ 32 & 33 & 33 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ \phi \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ B & B & B \\ 32 & 33 & 33 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ q \\ 3 \end{bmatrix} \quad \dots (3)$$

El ensamblaje de las ecuaciones anteriores se realiza mediante las condiciones de 'compatibilidad' de potenciales y 'equilibrio' de flujos, esto es, respectivamente

$$\phi_i^j = \phi_j^i$$

$$k_{ij}^j q_j^j = -k_{ij}^i q_i^i = r_{ij} \quad i \neq j \quad \dots (4)$$

donde en la segunda igualdad se ha tenido en cuenta el sentido de las normales exteriores a cada subregion, así como el significado físico de flujo. Si se adopta la notación de la figura 3

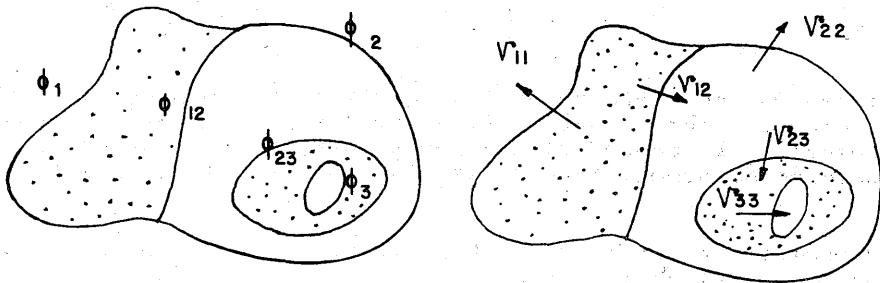


FIGURA 3

se tiene

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ A & A + A & A & A & 0 \\ 11 & 12 & 11 & 12 & 13 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ A & A + A & A & A & 0 \\ 21 & 22 & 21 & 22 & 23 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ & A & A & A + A & A \\ & 31 & 32 & 33 & 33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi & \phi & \phi & \phi & \phi \\ 11 & 12 & 22 & 23 & 33 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ (B/k) & (B/k) - (B/k) & (B/k) & (B/k) & (B/k) \\ 11 & 1 & 12 & 2 & 13 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ (B/k) & (B/k) - (B/k) & (B/k) & (B/k) & (B/k) \\ 21 & 1 & 22 & 1 & 21 & 2 & 22 & 2 & 23 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ & -(B/k) & (B/k) & (B/k) - (B/k) & (B/k) & (B/k) \\ & 31 & 32 & 33 & 32 & 33 \end{bmatrix} \dots (5)$$

Si, por ejemplo,

$$\phi_{11} = \text{dato}$$

$$r_{22} = \text{dato}$$

$$\phi_{33} = \text{dato}$$

su aplicación en las ecuaciones anteriores conduce al sistema final (6) que, como puede observarse resulta de una reordenación de columnas. El procedimiento puede automatizarse y es de notar la aparición de submatrices nulas que facilitan el almacenamiento.

Una discusión sistemática sobre la forma mas conveniente de ordenación puede verse en [ 48 ].

$$\begin{bmatrix} A_{12}^1 + A_{11}^2 & A_{12}^2 & A_{13}^2 & -\frac{B_{11}^1}{K_1} & -\frac{B_{12}^1}{K_1} + \frac{B_{12}^2}{K_2} & -\frac{B_{13}^2}{K_2} & 0 \\ A_{22}^1 + A_{21}^2 & A_{22}^2 & A_{23}^2 & \frac{B_{21}^1}{K_1} & \frac{B_{22}^1}{K_1} + \frac{B_{21}^2}{K_2} & \frac{B_{23}^2}{K_2} & 0 \\ A_{31}^2 & A_{32}^2 & A_{33}^2 + A_{32}^2 & 0 & B_{31}^2 / K_2 & -\frac{B_{33}^2}{K} + \frac{B_{33}^3}{K} & \frac{B_{33}^3}{K_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \\ \phi_{23} \\ V_{11} \\ V_{12} \\ V_{23} \\ V_{33} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -A_{11}^1 \phi_{11} + \frac{B_{12}^2}{K_2} V_{22} \\ -A_{21}^1 \phi_{11} + \frac{B_{22}^2}{K_2} V_{22} \\ \frac{B_{32}^2}{K_2} V_{22} - A_{33}^3 \phi_{33} \end{bmatrix} \dots \dots (6)$$

Segun se advirtió en el capitulo I , el procedimiento puede utilizarse en el caso de cuerpos alargados , para evitar el mal acoplo que se produce por la enorme influencia que en ellos tiene el diferente orden de distancias .

## 2.CONEXION ELEMENTOS FINITOS - ELEMENTOS DE CONTORNO.

Existen situaciones ( no linealidades, detalles en volumen , etc) en que la versatilidad del M.E.F. lo hace indicado en una zona limitada del dominio , mientras en el resto la uniformidad del medio y su extensión aconseja el tratamiento con M.E.C.

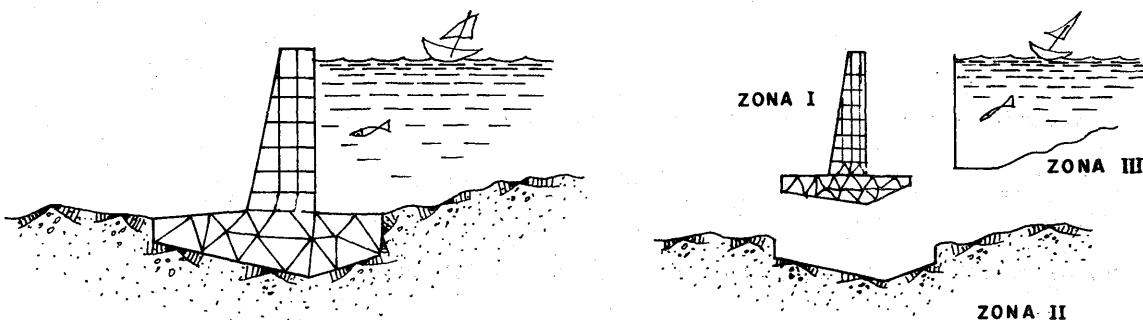


FIGURA 4

El ejemplo de la figura 4 es típico de los problemas de interacción fluido - estructura o terreno - estructura . Esta última debe ser analizada en detalle para su diseño , por lo que interesa una información masiva en todo su dominio . Por su parte, el resto sólo interesa , en general , en su interfase ; su extensión y homogeneidad recomiendan el uso de elementos de contorno.

El tratamiento es semejante al del apartado anterior , siendo el matiz diferenciador el que , en flujos , el M.E.C. trabaja con valores repartidos en el contorno , mientras que el F.E.M. utiliza fuerzas equivalentes en los nodos . Se precisa , pues , una integración previa que , en el caso plano y elementos lineales se realiza utilizando las funciones de forma habituales lo que permite una compatibilidad absoluta de ambos métodos en las interfases de las dos regiones y la consiguiente previsible bondad de los resultados.

FIGURA 5

limitaría a

$$Q_{\text{nodal}}^{\text{equiv}} = -k$$

donde  $k$  es 1

$$l_{ij} = 0$$

Existe adem  
simetría de

En efecto ,

$$A \stackrel{\phi}{\sim} B \stackrel{q}{\sim} C$$

de modo que

$$B \stackrel{-1}{\sim} A \oplus \phi = q$$

lo que perm  
equivalentes

Ahora bien ,  $\tilde{B}^{-1} \tilde{A}$  no es simétrica por razones muy bien discutidas por Hartman [50] en el caso elástico .

En particular , la pérdida de simetría implica que , puesto que la suma de elementos de cada fila es nula por construcción , la suma de los de cada columna sea distinta de cero lo que arrastra la violación de la condición

$$\int_{\partial\Omega} q = 0 \quad \dots (11)$$

que , en elasticidad , representa una condición de equilibrio .

Se han hecho numerosos intentos para simetrizar la matriz  $\tilde{B}^{-1} \tilde{A}$  desde el mas simple

$$\tilde{G}_{eq} = \frac{1}{2} \left[ \tilde{B} \tilde{A} + (\tilde{B} \tilde{A})^T \right] \quad \dots (12)$$

justificado con razones variacionales por Zienckiewicz [51] o Brebbia [ 12 ] , hasta la materialización de las recomendaciones de Hartman por Bolteus et al.[52].

En este sentido , parece ser recomendable el siguiente procedimiento

- a) Se suman los elementos de cada columna
- b) El resultado se divide entre el número de filas y los residuos se añaden a cada elemento de la columna.
- c) Se simetriza la matriz mediante (12).

Evidentemente , existen muchas alternativas a este proceder que parece ser el mas sencillo y efectivo .

Una nueva y prometedora idea está siendo desarrollada actualmente por Doblaré [53] .Consiste en estudiar la posibilidad de fuerzas concentradas en el contorno que provoquen un plexo tensional como el real .

Se procede por superposición de dos estados , uno de los cuales se corresponde con la aplicación de las citadas cargas concentradas ; para conseguir la resolución se precisa , evidentemente , un modo de colocación adecuado a la evitación de las singularidades tanto de los polos como de las cargas equivalentes.

Con ello no se evita , en principio , la asimetría de la matriz , pero el sentido físico del acoplamiento se hace mas evidente y los resultados parecen ganar en exactitud.

### 3.ELEMENTOS DE CONTORNO ADAPTABLES

Como es bien sabido , en el metodo de los elementos finitos se suele hablar de dos tipos de convergencia . La primera , o convergencia  $h$  , se refiere a la mejora del resultado que se obtiene refinando la malla . Debido a la correspondencia elemento - variables nodales - funciones de interpolación , ello implica un ajuste progresivo de los resultados en aquellas zonas donde se produce el refinamiento .

Se trata del método mas usado cuando , de forma pragmática , se desea tener una idea de la convergencia de los resultados . Su principal inconveniente radica en el hecho que cada refinamiento exige el cálculo de matrices de rigidez diferentes de las anteriores , de modo que la información debe ser rehecha en cada caso y , por tanto , los costes son elevados .

El segundo método analiza la convergencia  $p$  , o refinamiento de la aproximación mediante el incremento del grado del polinomio definido sobre cada elemento . Se trata de abandonar la idea de asociar a cada nodo el valor físico de la variable correspondiente en la aproximación típica

$$u \sim a_1 \phi_1 + a_2 \phi_2 + a_3 \phi_3 + \dots + a_n \phi_n \quad \dots (13)$$

donde las funciones  $\phi$  son unidad en el nodo correspondiente y cero en el resto .

Por el contrario , se vuelve a la idea original de Ritz , semejante al de un desarrollo en serie de Fourier , donde las funciones  $\phi$  estan definidas globalmente y los coeficientes de ponderación no tienen porque presentar un significado físico concreto .

Evidentemente , la vuelta no es total ; se siguen manteniendo elementos y dentro de cada uno de ellos se establece una jerarquía de funciones  $\phi_i$  .

Con esta situación intermedia entre la globalidad absoluta de Ritz y la correspondencia absoluta de la discretización con las variables se consigue , por un lado , mantener una versatilidad suficiente para el ajuste por trozos y , por otro , refinar la aproximación de forma inteligente ya que , al igual que sucede en una serie de Fourier , cada término que se añade produce un efecto menor , lo que posibilita el truncamiento cuando se alcanza un determinado nivel de precisión . Además , puesto que cada  $\phi$  tiene un soporte perfectamente definido desde un principio, cada etapa del refinamiento aprovecha todos los cálculos



anteriores y sólo se necesita evaluar los nuevos términos de la matriz de rigidez

La primera idea fue propuesta por Zienckiewicz et al. (1970), y posteriormente han desarrollado el método Szabo et al. (1978), Babuska (1975, 1978), Peano (1978), etc

El proceso operativo incluye así

a) Establecimiento de una malla amplia sobre el dominio a analizar.

b) Definición de una jerarquía de funciones de interpolación dentro de cada elemento.

c) Establecimiento de un 'indicador' de las zonas que precisen la adición de nuevas funciones jerarquizadas.

d) Establecimiento de un 'estimador a posteriori' que evalúe el error cometido y precise el momento en que pueda ser detenido el proceso.

Un método que sigue los pasos anteriores se denomina autoadaptable y, como se puede comprender, resulta interesantísimo para problemas no triviales.

En lo que sigue vamos a contemplar la posibilidad de extender las ideas anteriores al método de los elementos de contorno.

#### 4. ELECCION DE LAS FUNCIONES DE INTERPOLACION EN EL M.E.C. ELEMENTOS NATURALES.

En el M.E.C. expuesto anteriormente debido a la diferencia entre funciones de interpolación y funciones de ponderación, las matrices resultantes son asimétricas, lo que exige el cálculo de todas y cada una de las integrales que forman sus elementos.

También, aunque las funciones de interpolación sean locales, las de ponderación están definidas globalmente. Además de asimétricas las matrices son, según se vio, llenas.

No es pues extraño que tras los primeros años de adquirir confianza en los resultados del método se pretenda ahora encontrar soluciones que permitan reducir el esfuerzo de cálculo citado.

En este sentido, la idea de funciones jerarquizadas se presenta como una excitante posibilidad. En efecto, la filosofía isoparamétrica expuesta anteriormente ha servido para automatizar el método mejorando intentos anteriores. No obstante es artificial la creación de elementos mediante funciones de forma locales cuando con ello no se consigue la estructura en banda típica del M.E.F.

Para fijar ideas piénsese en los casos de potencial bidimensional que se croquizan en la figura 6 .

Si se prescinde de cómo conseguir un modelo geométrico del contorno.

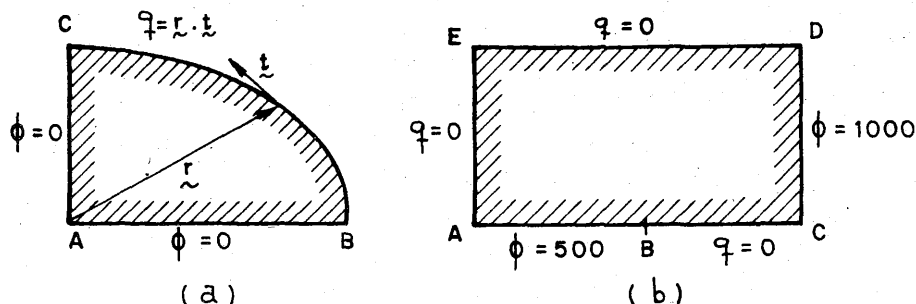


FIGURA 6

no , lo que no es mas que un problema de interpolación , se observa la existencia de elementos ' naturales ' definidos bien por la existencia de esquinas , bien por singularidades o cambio en las condiciones de borde .

Es evidente que en el caso 6 a. tanto el flujo como el potencial evolucionan regularmente dentro de cada uno de los trozos AB,BC, CA (figura 7 ) que son , por tanto , los elementos lógicos en los

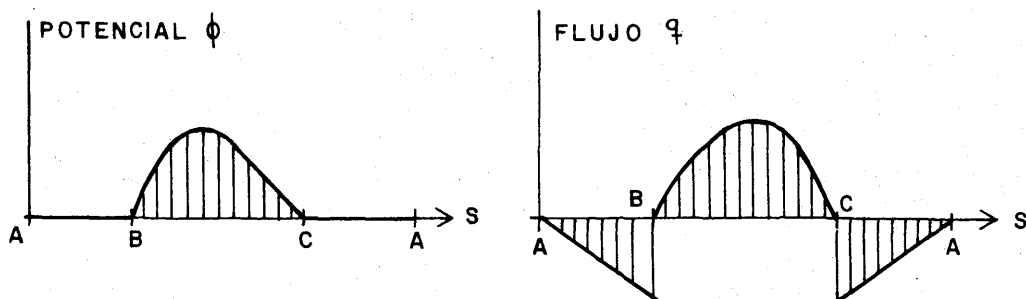


FIGURA 7

que debe intentarse la interpolación de las variables  $\phi$  y  $q$  .

Por su parte , en el ejemplo 6 b. las esquinas ACDE introducen flujos discontinuos que provocan la conveniencia de subdividir el contorno en esos trozos , pero , ademas , el cambio de

condiciones en B sugiere inmediatamente la elección de los elementos naturales AB, BC, CD, DE, EA.

Un ejemplo de cómo se estudia la convergencia mediante un método h en este caso puede verse en Alarcon et al. (1979). La sencillez de la geometría indica claramente lo absurdo que resulta un tratamiento local en este caso cuando unas pocas funciones globales y jerarquizadas sobre cada elemento (mas la posible adición de alguna que represente la singularidad de q) permitirían obtener resultados aceptables con un esfuerzo incomparablemente menor: en efecto, hay dominios fijos de integración y el número de funciones está provocado por la complejidad del potencial y no por la geometría.

## 5. JERARQUIA DE FUNCIONES DE INTERPOLACION

En los casos planos, las funciones que se precisan son monodimensionales. Si se sigue con la idea de un desarrollo en

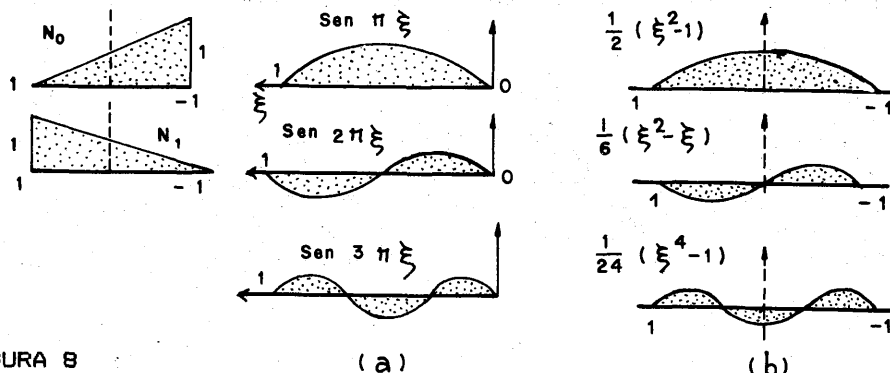


FIGURA 8

de Fourier, la jerarquía sería la indicada en la figura 8a donde

$$0 \leq \xi \leq 1$$

Una serie popular, es la propuesta por Peano et al. (1978) figura 8 b. que está compuesta por las dos funciones lineales mas

$$N = \frac{1}{p!} \left( \sum_{j=0}^p \xi^j - b \right) \quad \dots (14)$$

con

$b = 1$  si  $p$  es par

$b = \frac{1}{2}$  si  $p$  es impar

En estas funciones , el significado de los coeficientes  $a_j$  y  $b_j$  de la aproximación pasaría a ser el de derivadas sucesivas de la función en el centro del intervalo

$$a_{p+1} = \frac{d^p \hat{\phi}}{d\xi^p}$$

$$b_{p+1} = \frac{d^p \hat{q}}{d\xi^p}$$

... (15)

como puede comprobarse inmediatamente .

En problemas 3 D se necesitan funciones bidimensionales que se

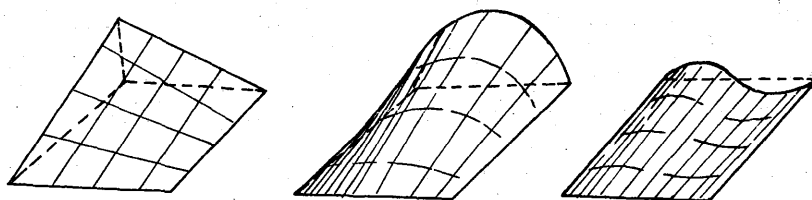


FIGURA 9

obtienen simplemente como productos de las anteriores (Figura 8).

## 6. JERARQUIZACION DE LAS MATRICES DE INFLUENCIA

El uso de las funciones de interpolación indicadas en el apartado anterior provoca la deseada jerarquización de las matrices de influencia . Observemos un elemento .

Si el desarrollo

$$\hat{u} = a_1 \phi_1 + a_2 \phi_2 + a_3 \phi_3 + \dots + a_N \phi_N \quad \dots (16)$$

provoca la matriz

$$\begin{bmatrix} \int q_1^* J \phi_1 & \int q_2^* J \phi_2 & \dots & \int q_1^* J \phi_N \\ \int q_2^* J \phi_1 & \int q_2^* J \phi_2 & \dots & \int q_2^* J \phi_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int q_N^* J \phi_1 & \int q_N^* J \phi_2 & \dots & \int q_N^* J \phi_N \end{bmatrix} = \hat{A} \quad \dots (17)$$

la adición de  $a_{n+1} \phi_{n+1}$  implica orlar  $\hat{A}$  en la forma

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A} & \int q_j^* J \phi_{N+1} \\ \int q_{n+1}^* J \phi_1 & \int q_{n+1}^* J \phi_{n+1} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} * \\ N \\ * \\ 1 \\ * \end{matrix} \quad \dots (18)$$

Obsérvese que, para que esto sea posible, se precisa la elección de un nuevo punto de colocación que permita la escritura de la nueva ecuación.

Al respecto existen varias alternativas, como es la elección de puntos de integración utilizados en las cuadraturas de Gauss previas o la utilización de los puntos correspondientes a los máximos de las funciones de interpolación.

Así las funciones lineales se corresponderían con los extremos de los elementos y, si se utiliza la familia de senos se puede disponer de los puntos  $\xi_j = 1/2j$  donde  $j = 1, 2, 3, \dots$  etc.

Aunque es evidente, conviene observar también que los refinamientos sucesivos se refieren exclusivamente a la variable incógnita dentro de cada elemento, siendo el dato interpolado desde el principio según las indicaciones del usuario, tal como sucede con la geometría.

La jerarquización inducida en las matrices A y B se transmite íntegramente al sistema final ,consiguiéndose matrices de rigidez anidadas

$$\begin{bmatrix} K & K & K & \dots & K \\ 11 & 12 & 13 & & 1N \\ K & K & K & \dots & K \\ 21 & 22 & 23 & & 2N \\ K & K & K & \dots & K \\ 31 & 32 & 33 & & 3N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K & K & K & \dots & K \\ N1 & N2 & N3 & & NN \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 1 \\ X \\ 2 \\ X \\ 3 \\ \vdots \\ X \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 1 \\ F \\ 2 \\ F \\ 3 \\ \vdots \\ F \\ N \end{bmatrix} \quad \dots (19)$$

Por si fuera poco , cada nuevo término  $x_{N+1}$  va disminuyendo en importancia respecto al anterior , lo que hace que se debiliten los acoplamientos y se obtenga una matriz mejor condicionada .

Obsérvese también que el anidado y sucesiva evanescencia de las contribuciones sugiere la utilización de métodos iterativos tras la primera resolución del problema , manteniendo como tanteo inicial la solución anterior a cada paso .

## 7.CRITERIO DE PARADA

Según se dijo mas arriba , para que un sistema pueda ser llamado adaptable se precisa un indicador de la importancia de los términos a añadir así como un estimador del error implícito en la solución .

La labor desarrollada por Băbuska y otros para el M.E.F. no existe todavía en el M.E.C. y por ello hasta ahora se ha procedido a utilizar el criterio de Peano que se describe a continuación .

Al estimar u mediante (16) en el problema

$$Au - f = 0 \quad \dots (20)$$

se produce un residuo

$$\hat{A}u - f = r \quad \dots (21)$$

debido al error

$$e = u - \hat{u} \quad \dots (22)$$

evidentemente

$$Ae = Au - A\hat{u} = -f - r + f = -r \quad \dots (23)$$

Se define el error 'energetico' como

$$\|e\|^2 = e Ae = -e r \quad \dots (24)$$

que, con funciones jerarquizadas, se aproxima asi

$$u - \hat{u} \sim u - \hat{u} = a_{i+1} N_{i+1}$$

por lo que

$$\|e\|^2 = -a_{i+1} N_{i+1} r \quad \dots (25)$$

De las nuevas ecuaciones de equilibrio

$$K_{i+1,j} a_j + K_{i+1,i+1} a_{i+1} = f_{i+1} \quad \dots (26)$$

es decir

$$a_{i+1} = K_{i+1,i+1}^{-1} (f_{i+1} - K_{i+1,j} a_j) \quad \dots (27)$$

Pero

$$-N_{i+1} r = N_{i+1} A(u - \hat{u}) \sim a_{i+1} N_{i+1} A N_{i+1} = a_{i+1} K_{i+1,i+1} \quad \dots (28)$$

siempre que  $N_i$  sean ortogonales en la norma energetica para  $i \neq j$

Utilizando (30) y (31) en (28) se obtiene

$$\|e\|^2 = K_{i+1,i+1}^{-1} (f_{i+1} - K_{i+1,j} a_j)^2 \quad \dots (29)$$

que es el indicador de Peano a que hacíamos referencia mas arriba.

Dependiendo de su valor, se escogen aquellos grados de libertad en los que el indicador es mayor y se procede a una resolución iterativa del sistema resultante.

Por el momento no se dispone de ningún estimador a posteriori que permita asegurar la precisión obtenida.

## B. EJEMPLO

En la figura siguiente se recoge el problema del cuarto de elipse

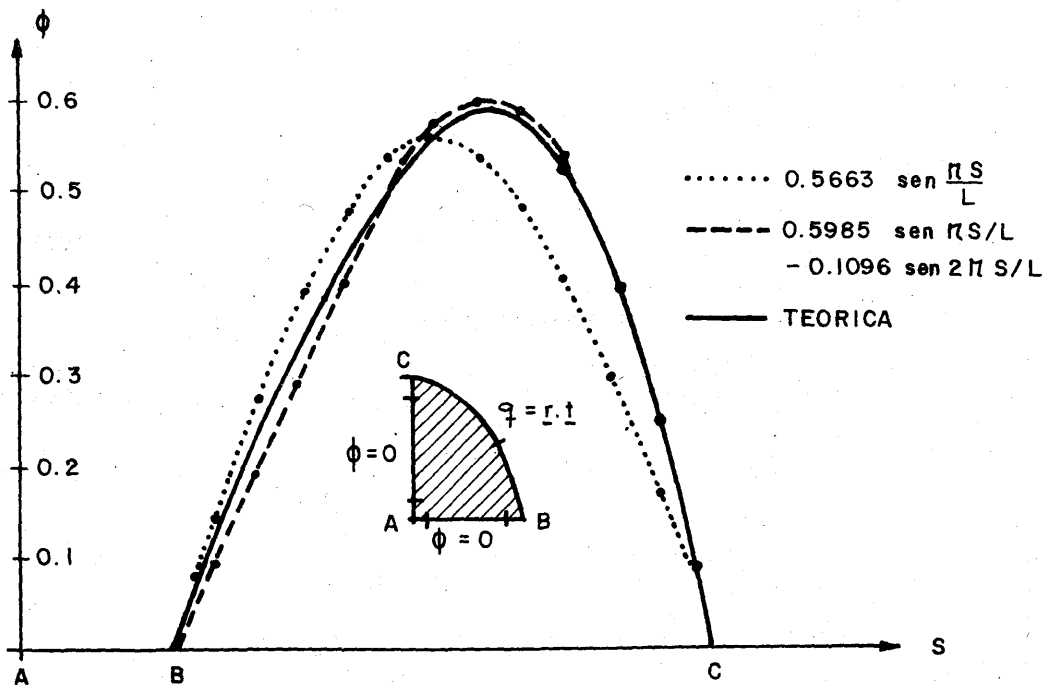


FIGURA 10

croquizado en 6 a.

La primera pasada corresponde a incógnitas con funciones  $N_1$  y  $N_2$  en los lados AB y AC y en una  $N_3$  para  $\phi$  en BC puesto que el valor  $\phi = 0$  en B y C proscribió el uso de las  $N$  lineales.

Observese que las variables son 5: los dos flujos anterior y posterior a B, el flujo en B en el lado AB, el flujo en C en



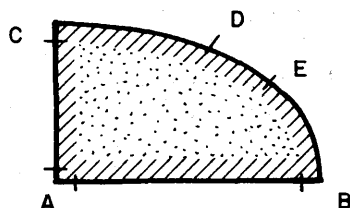


FIGURA 11

el lado AC, mas el valor del potencial en el centro D de BC. La curva llena es la solución teórica de este problema, mientras que la de guiones da la solución de este primer paso.

La siguiente aproximación consiste en la suma de un  $\sin 2\pi s/L$  en la zona BC y la colocación en el punto E (fig.11).

La línea de punto y raya indica la nueva solución, que, como puede apreciarse, es excelente.

El problema se ha resuelto así con solo 6 incógnitas, mientras que una aproximación comparable exige 12 elementos lineales.

La idea de jerarquías de funciones de interpolación permite discretizar el contorno en elementos naturales de acuerdo con las discontinuidades previsibles en las variables del problema.

Se puede mejorar de una forma independiente y automática la aproximación tanto en diferentes elementos como en las variables esenciales y naturales del problema.

Se puede reducir el cálculo de integrales (la parte mas costosa del M.E.C.) al mínimo imprescindible.

Se produce un mejor condicionamiento de la matriz y se debilitan los acoplamientos sucesivos.

Toda la información precisa es aprovechada al máximo al pasar de una aproximación a la siguiente, lo que facilita el uso de soluciones iterativas.

## APENDICE

### DESCRIPCION DEL PROGRAMA CA-BEM.

C.Garcia-Suarez y A.Reverter

El programa resuelve problemas de potencial, en dominios planos, definidos por la ecuacion de Laplace ( $\nabla^2 \phi = 0$ ). Para ello es necesario realizar una discretización, en forma de elementos lineales, sobre el contorno que define el dominio en estudio e introducir los valores de potencial y del flujo que son conocidos a lo largo de dicho contorno (condiciones tipo Dirichlet o Neuman). Dichos valores se sitúan en los nodos que se utilizan para definir el contorno del elemento, y se supone además que la variación de las funciones dentro de cada elemento es lineal. El dominio es simplemente conexo.

Existe también la posibilidad de presentar los resultados en forma grafica mediante el dibujo de las isolíneas de la función  $\phi$  en el interior del dominio en estudio, para lo cual es necesaria la definición de unos nuevos nodos interiores en los que se calcula el valor de la función  $\phi$  sobre los que como base se traza una malla de rectangulos de variación bilineal en los que se interpolaran las isolíneas.

#### ENTRADA DE DATOS

La entrada de datos para la resolución del problema en el contorno se separa en dos bloques diferentes: el correspondiente a la geometría y el relativo a las condiciones de contorno tal como se explica a continuación.

Datos correspondientes a la geometría

Los nodos situados sobre el contorno se numeran de forma consecutiva en sentido antihorario, y sus coordenadas se refieren a unos ejes cartesianos situados en un punto cualquiera del plano.

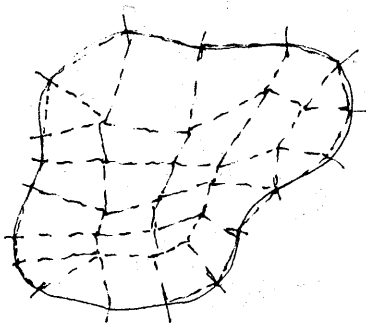


FIGURA 1

En la entrada es necesario dar el numero de nodo, su coordenada X y su coordenada Y, comenzando en el nodo 1 y acabando en el nodo con numeración mayor. Cuando se introducen 2 nodos cuya numeración no es consecutiva se interpolan automáticamente, de forma lineal, las coordenadas de todos los comprendidos entre ambos. La entrada de datos referentes a la geometría se finaliza al introducir las coordenadas del ultimo nodo.

Datos correspondientes a las condiciones en el contorno

Las diferentes condiciones de contorno implican la existencia de 5 clases de nodos diferentes, cada una de ellas representada mediante un código, tal como se expresa en la tabla:

DATOS NODALES		CODIGO
q antes	q despues	1
$\phi$	q antes	2
$\phi$	q despues	3
$\phi$	$\phi$ (esquina)	4
$\phi$	$\phi$ (liso)	5

Los datos nodales son los valores de la función ( $\phi$ ) o el flujo (q) que sean conocidos en cada punto. La distinción entre flujo antes y despues de cada nodo es debida a la existencia de dos normales: una antes y otra después del aquel.

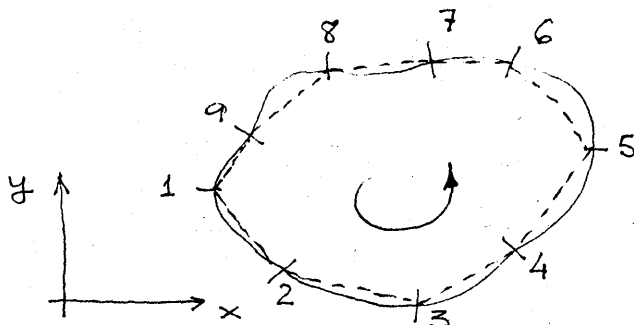


FIGURA 2

Hay que hacer notar que en cada nodo sólo existe una incógnita y en consecuencia sólo se precisa una ecuación por cada uno de ellos para poder resolver el problema.

El caso 5 corresponde a la situación en la cual las normales antes y después del nodo son las mismas y por tanto  $q_{\text{ant}} = q_{\text{desp}}$  es decir, en este tipo de nodos existe también una sola incógnita.

El caso 4 es sin embargo una excepción que requiere una solución especial ya que el flujo es un sólo dato y las incógnitas son dos flujos. Pero a lo largo de los lados se puede obtener la derivada de la función  $\psi$ , por tanto, su gradiente con lo cual se realiza el cálculo de la derivada en las direcciones de las normales que soportan las  $q$ . Con este artificio se eliminan incógnitas del problema lo que permite reducir el tamaño del sistema de ecuaciones.

En el caso límite en que todos los nodos fueran del tipo 4, no es necesario resolver ningún sistema de ecuaciones.

En la entrada que estamos tratando, hay que introducir cuatro valores diferentes por nodo. El primero se corresponde con el número de nodo, el segundo con su código, y los dos últimos con aquellos valores de la función  $\psi$  el flujo que sean conocidos y en el orden que se establece en la tabla anterior. En los tipos de nodo 4 y 5 el cuarto valor es ignorado por el programa, aunque su lectura es sin embargo necesaria.

Al igual que en la introducción de datos de las coordenadas, las condiciones de contorno relativas a los nodos se introducen en forma consecutiva y los valores no explicitados se interpolan linealmente entre los conocidos anterior y posterior.

Datos correspondientes a puntos internos

Resuelto el problema en el contorno y en el caso de desear el dibujo de isolíneas en el interior del dominio, es necesario

establecer un reticulado del mismo mediante una malla que se define por una serie de nodos y una tabla que indica los nodos que corresponden a cada elemento de la malla. Cada elemento consta de cuatro nodos, siendo utilizados los que existían en el contorno para la resolución inicial del problema

En este caso es también posible realizar una generación automática de las coordenadas de los nodos y la conectividad de las mallas, siempre que se cumplan unos determinados requisitos.

#### DIAGRAMA DE FLUJO

El programa comienza con la lectura de datos referentes a las coordenadas en la forma anteriormente indicada. Realizada esta operación se escoge entre 3 acciones diferentes: obtener un dibujo del contorno en pantalla, un listado de las coordenadas, o continuar con la introducción de datos. En caso de elegir esta última opción, ya no se permita realizar ninguna de las dos anteriores.

Una vez finalizado el proceso de introducción de las condiciones de contorno, es posible obtener un listado de las mismas en la impresora, y realizado o no este paso, comienza el proceso de cálculo.

En primer lugar y siempre que existan nodos tipo 4, se calculan los valores del flujo correspondientes a los mismos, y en el caso particular en que todos los nodos fueran de este tipo, el cálculo estaría finalizado.

A continuación comienza el proceso de cálculo de las matrices de influencia, que es controlado por un segmento de programa que maneja cuatro subrutinas principales:

- cálculo de los coeficientes del sistema
- resolución del sistema
- interpretación de la solución
- impresión de resultados

La subrutina de cálculo de los coeficientes del sistema, maneja a su vez otra serie de subrutinas.

El cálculo se logra mediante la aplicación de la solución fundamental entre cada dos nodos sucesivos y para todos los nodos sobre los que se aplica dicha solución fundamental (de forma que son estos últimos los que varían mas rápidamente).

Una vez calculado el resultado de las integrales sobre un elemento y desde un determinado nodo, se llama a una subrutina que se encarga de realizar el ensamblaje de la matriz del sistema, de forma que cada coeficiente es introducido en su situación final determinada.

El cálculo de las integrales a lo largo del contorno, se consigue mediante una cuadratura de Gauss con cuatro puntos. Finalizado este cálculo para todos los elementos y para todos los nodos (con excepción de los de tipo 4) ya está formada la matriz del sistema y la subrutina de solución se encarga de resolverlo.

Con los resultados obtenidos, la subrutina de interpretación procede a la identificación con el valor de la función o el flujo que corresponde a la incógnita de cada nodo, con lo que ya todos los valores en el contorno son conocidos. Una última subrutina se encarga de imprimir los resultados finales.

En este punto es opcional el cálculo de los valores de la función en puntos internos, lo que se realiza aplicando la solución fundamental en dichos puntos y computando las integrales a lo largo de todo el contorno, en forma similar a la que se hace durante la formación de las matrices de influencia.

Realizado este cálculo, queda formada una malla de elementos de cuatro nodos, en la que se realiza una interpolación bilineal utilizando un sistema de coordenadas naturales, con el fin de determinar puntos pertenecientes a una determinada isolínea, y que sirven para lograr su trazado, recorriendo uno a uno todos los elementos de la malla.



```

1 '          PROGRAM CABEM
2 '   October, 1983
3 '          Dept. Estructuras
4 '   Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales
5 '   C/José Gutierrez Abascal 2, Madrid 6, Spain
6 '
10 SCREEN 0
20 OPTION BASE 1
30 KEY OFF
40 PRINT CHR$(12):COLOR 2
50 FOR I=1 TO 5
60   PRINT " "
70 NEXT I
80 PRINT "   This program solves plane potential problems inside simply "
81 PRINT "   conected domains when described by Laplace's equation. "
90 PRINT "   The program gives the values of the unknow "
100 PRINT "   function and the flux along the boundary. The function values"
110 PRINT "   can be computed at any interior point previously indicated."
120 PRINT "   The lines of constant values for the function can be drawn if"
130 PRINT "   desired."

140 FOR I=1 TO 2
150   PRINT " "
160 NEXT I
170 PRINT "Press any key to continue           (Is printer ready?)"
180 A$=INKEY$:IF A$="" THEN 180
190 '
200 '
210 '   The geometry of the mesh is read and/or generated
220 '
230 PRINT CHR$(12)
240 INPUT "number of boundary elements = ";NBE
250 '
260 '#### X(I) and Y(I) are the coordinates of the boundary nodes
270 '
280 DIM X(NBE),Y(NBE)
290 PRINT CHR$(12)
300 FOR I=1 TO 4:PRINT "":NEXT I
310 PRINT "   Now you are required to give the boundary geometry. "
320 PRINT "   The program has been prepared to allow partial "
330 PRINT "   automatic generation."
340 PRINT "   When the coordiantes of a node is not explicity given."
350 PRINT "   linear interpolation is assumed."
360 FOR I=1 TO 2:PRINT "":NEXT I:PRINT "   Press any key to continue"
370 A$=INKEY$:IF A$="" THEN 370
380 PRINT CHR$(12)
381 PRINT "Do you want this data to be read from any file ? (Y o N)
382 A$=INKEY$:IF A$="" THEN GOTO 382
383 IF (A$<>"Y" AND A$<>"y") THEN GOTO 390
384 CLS:INPUT "enter file name";B$
385 OPEN B$ FOR INPUT AS#1
386 FOR NODO=1 TO NBE

```



```

387 INPUT #1, X(NDDO),Y(NDDO)
388 NEXT NDDO
389 CLOSE #1:GOTO 560
390 CLS:PRINT " Node Number,X coordinate,Y coordinate (enter in that order
)"
400 PRINT:PRINT:PRINT
410 K=0
420 FOR I=1 TO NBE
430 IF (K=NBE) THEN GOTO 570
440 INPUT " ";L,X(L),Y(L)
450 IF (L=(K+1)) THEN K=K+1:GOTO 550
460 INCRE=L-K
470 AR=(X(L)-X(K))/INCRE
480 AZ=(Y(L)-Y(K))/INCRE
490 IN =INCRE -1
500 FOR M=1 TO IN
510 X(K+M)=X(K)+AR*M
520 Y(K+M)=Y(K)+AZ*M
530 NEXT M
540 K=K+INCRE
550 NEXT I
560 ' The boundary geometry has been already read
570 PRINT CHR$(12)
580 PRINT "Select desired code : "
590 PRINT":PRINT"
600 PRINT " 1)To draw the boundary"
610 PRINT " 2)To print the coordinates"
620 PRINT " 3)To go on with the data input process"
640 INPUT "...":CODE
650 ON CODE GOSUB 2230,1410,1730
655 IF (COND4<>0) THEN GOSUB 3000
656 IF COND4=NBE THEN GOTO 666
660 IF FLAG=1 THEN GOSUB 680 ELSE GOTO 570
661 'call solution subroutine
662 GOSUB 11000
663 'call interpretation subroutine
664 GOSUB 15000
665 'call printing solution subroutine
666 GOSUB 20000
667 'call inside points subroutine
668 GOSUB 50000
670 END
680 '
690 ' computation of influence matrices via BEM
700 '
701 CLS:PRINT "The system is being assembled"
702 NEC=NBE-COND4
705 DIM COEF(NEC,NEC+1),ADIAG(NEC)
706 JCOND4=0
707 ICOND4=0
710 DIM W(2,4),EPSI(2,4),N1(2,4),N2(2,4)
810 DATA -.8611363115,-.3399810435,.3399810435,.8611363115,-0.57735026,0.5773502
6.0.0

```

```

820 DATA 0.3478548451,0.6521451548,0.6521451548,0.3478548451,1,1,0,0
825 FOR ES=1 TO 2
830   FOR I=1 TO 4
840     READ EPSI(ES,I)
850   NEXT I
855 NEXT ES
856 FOR ES=1 TO 2
860   FOR I=1 TO 4
870     READ W(ES,I)
880   NEXT I
885 NEXT ES
886 FOR ES=1 TO 2
890   FOR I=1 TO 4
900     N1(ES,I)=(1-EPSI(ES,I))/2
910     N2(ES,I)=(1+EPSI(ES,I))/2
920   NEXT I
930 NEXT ES
935 NFI1=0
940 FOR EL=1 TO NBE
950   JEL=EL+1
960   IF (EL=NBE) THEN JEL=1
962   IF EL=1 AND COND(EL,1)<>4 THEN NFI1=1
965   IF EL>1 THEN NFI1=NFI2
967   IF COND(JEL,1)<>4 THEN NFI2=NFI1+1 ELSE NFI2=NFI1
968   IF JEL=1 THEN NFI2=1
970   X1=X(EL)
980   Y1=Y(EL)
990   X2=X(JEL)
1000  Y2=Y(JEL)
1010  DX=X(JEL)-X(EL)
1020  DY=Y(JEL)-Y(EL)
1030  LONG=SQR(DX*DX+DY*DY)
1040  UN1=DY/LONG
1045  UN2=-DX/LONG
1046  B111=(3/4-.5*LOG(LONG))*LONG
1047  B222=(1/4-.5*LOG(LONG))*LONG
1050  FOR NODO=1 TO NBE
1052    IF COND(NODO,1)=4 THEN GOTO 1355
1055    A1=0:A2=0
1060    IF (NODO=EL) THEN B1=B111:B2=B222:GOTO 1305
1070    IF (NODO=JEL) THEN B2=B111:B1=B222:GOTO 1305
1090    XP=X(NODO)
1100    YP=Y(NODO)
1110    B1=0 :B2=0
1120    DX=X1-XP
1130    DY=Y1-YP
1140    R=SQR(DX*DX+DY*DY)
1150    UR1=DX
1160    UR2=DY
1170    DIS=UR1*UN1+UR2*UN2
1172  ***criteria for computing npi should be introduced
1173    NPI=4:TIP=1

```

```

1180         FOR K=1 TO NP1
1181             XLOC=N1(TIP,K)*X1+N2(TIP,K)*X2
1182             YLOC=N1(TIP,K)*Y1+N2(TIP,K)*Y2
1190             R=SQR((XLOC-XP)^2+(YLOC-YP)^2)
1200             B=LOG(R)*W(TIP,K)
1210             B1=B1-N1(TIP,K)*B
1220             B2=B2-N2(TIP,K)*B
1230             H=DIS/R^2*W(TIP,K)
1240             A1=A1-H*N1(TIP,K)
1250             A2=A2-H*N2(TIP,K)
1260         NEXT K
1270         A1=A1*LONG/2
1280         A2=A2*LONG/2
1290         B1=B1*LONG/2
1300         B2=B2*LONG/2
1305         NCO=NODO-ICOND4
1310         ADIAG(NCO)=ADIAG(NCO)+A1+A2
1320         NNNN=EL:IND=1
1330         GOSUB 9000
1340         NNNN=JEL:IND=2
1350         GOSUB 9000
1352         GOTO 1360
1355         ICOND4=ICOND4+1
1360     NEXT NODO
1365     ICOND4=0
1369 NEXT EL
1370 ICOND4=0
1371 ' assembly of elements in the main diagonal
1372 FOR I=1 TO NBE
1373     CODE=COND(I,1)
1374     IF (CODE=4) THEN ICOND4=ICOND4+1: GOTO 1379
1375     NCO=I-ICOND4:A=-ADIAG(NCO)
1376     IF (CODE=2 OR CODE=3 ) THEN COEF(NCO,NEC+1)=COEF(NCO,NEC+1)-A*COND(I,2)
1377     IF (CODE=5) THEN COEF(NCO,NEC+1)=COEF(NCO,NEC+1)-A*COND(I,2)
1378     IF (CODE=1) THEN COEF(NCO,NCO)=COEF(NCO,NCO)+A
1379 NEXT I
1400 RETURN
1405 '
1406 '
1410 '   Printing of nodes coordinates"
1420 PRINT CHR$(12)
1430 PRINT "COORDINATES OF THE NODES"
1440 PRINT "===== == == ====="
1450 LPRINT CHR$(15)
1460 LPRINT "COORDINATES OF THE NODES"
1461 LPRINT "===== == == =====":LPRINT
1470 FOR I=1 TO NBE
1480     PRINT USING "##";I;
1490     PRINT USING " .####^";X(I);Y(I)
1500     LPRINT USING "##";I;
1510     LPRINT USING " .####^";X(I);Y(I)
1520 NEXT I

```

```

1521 LPRINT:LPRINT:LPRINT
1530 RETURN
1720 RETURN
1730 ' Boundary conditions
1740 '
1750 DIM COND(NBE,4),AIN(3)
1760 PRINT CHR$(12):FLAG=1
1770 PRINT CHR$(12):PRINT:PRINT:PRINT:PRINT
1780 PRINT " You are required to input the boundary conditions."
1790 PRINT " Mixed boundary conditions of Dirichlet and Neumann "
1800 PRINT " type are allowed."
1810 PRINT " Automatic generation using linear interpolation is"
1820 PRINT " permitted":PRINT:PRINT
1821 PRINT " REMEMBER !!!":PRINT
1822 PRINT " NODE DATA CODE"
1823 PRINT " -----:PRINT
1824 PRINT " q(bef), q(aft) ..... 1 "
1825 PRINT "  $\bar{q}$  , q(aft) ..... 2 "
1826 PRINT "  $\bar{q}$  , q(bef) ..... 3 "
1827 PRINT "  $\bar{q}$  ,  $\bar{q}$  (sharp) ..... 4 "
1828 PRINT "  $\bar{q}$  ,  $\bar{q}$  (smooth) ..... 5 "
1830 PRINT:PRINT:PRINT
1831 PRINT "if the data are going to be read from any file enter 'y'"
1840 PRINT "otherwise press any key to continue"
1850 A$=INKEY$:IF A$="" THEN GOTO 1850
1851 IF (A$(">")="y" AND A$(">")="Y" ) THEN GOTO 1860
1852 CLS:INPUT "file name";B$
1853 OPEN B$ FOR INPUT AS #1
1854 FOR NODD=1 TO NBE
1855 INPUT #1,COND(NODD,1),COND(NODD,2),COND(NODD,3),COND(NODD,4)
1856 NEXT NODD
1857 CLOSE #1:GOTO 2110
1860 PRINT CHR$(12)
1870 PRINT " Node number,Node code, $\bar{q}$ , $\bar{q}$ / $\delta n$  (back), $\bar{q}$ / $\delta n$  (forward)"
1880 PRINT " Enter in that order if known"
1890 PRINT:PRINT:PRINT
1900 K=0
1901 JCOND4=0
1910 FOR I=1 TO NBE
1920 IF (K=NBE) THEN GOTO 2110
1930 INPUT " ";L,COND(L,1),A1,A2
1940 '
1950 ' The information is interpreted according to the code
1960 '
1970 GOSUB 2540
1980 IF L=(K+1) THEN K=K+1:GOTO 2100
1990 INCRE=L-K
2000 FOR IN=1 TO 3
2010 AIN(IN)=(COND(L,IN+1)-COND(K,IN+1))/INCRE
2020 NEXT IN
2030 IN=INCRE-1
2035 COND=COND(L,1)
2040 FOR M=1 TO IN

```

```

2044         KM=K+M
2045         COND(KM,1)=COND
2050         FOR MM=2 TO 4
2060             COND(K+M,MM)=COND(K,MM)+A1N(MM)*M
2070         NEXT MM
2080     NEXT M
2090     K=L
2100 NEXT I
2110 ' End of boundary conditions input
2120 CLS:PRINT " Do you want the boundary coditions to be printed ? (Y/N)"
2130 A$=INKEY$:IF A$="" THEN GOTO 2130
2135 IF (A$<>"Y" AND A$<>"y") THEN RETURN
2140 LPRINT CHR$(15)
2141 CLS:PRINT " Node Code      I       $\delta \xi / \delta n$  (bef)   $\delta \xi / \delta n$  (aft)"
2142 LPRINT "BOUNDARY CONDITIONS"
2143 LPRINT "=====":LPRINT
2144 LPRINT " Node Code      I       $\delta \xi / \delta n$  (bef)   $\delta \xi / \delta n$  (aft)"
2145 LPRINT " -----"
2150 FOR I=1 TO NBE
2160     PRINT USING "###  ### ";I;COND(I,1);
2170     PRINT USING " +.#####^";COND(I,2);COND(I,3);COND(I,4)
2180     LPRINT USING "###  ### ";I;COND(I,1);
2190     LPRINT USING " +.#####^";COND(I,2);COND(I,3);COND(I,4)
2200 NEXT I
2202 RETURN
2210 ' The boundary is drawn
2220 '
2230 XMIN=X(1):XMAX=X(1):YMIN=Y(1):YMAX=Y(1)
2240 FOR I=1 TO NBE
2250     IF X(I)<XMIN THEN XMIN=X(I)
2260     IF Y(I)<YMIN THEN YMIN=Y(I)
2270     IF X(I)>XMAX THEN XMAX=X(I)
2280     IF Y(I)>YMAX THEN YMAX=Y(I)
2290 NEXT I
2300 DX=XMAX-XMIN
2310 DY=YMAX-YMIN
2320 EX=180/DX
2330 EE=180/DY
2340 IF (EX>ES) THEN ES=EX
2350 CLS
2360 SCREEN 1
2370 COLOR 1
2380 DEF FNXORN(XUS)=EE*(XUS-XMIN)+70
2390 DEF FNYORN(YUS)=190-EE*(YUS-YMIN)
2400 FOR I=1 TO NBE
2410     X1=FNXORN(X(I))
2420     Y1=FNYORN(Y(I))
2430     IF (I=NBE) THEN XF=FNXORN(X(1)):YF=FNYORN(Y(1)):GOTO 2460
2440     XF=FNXORN(X(I+1))
2450     YF=FNYORN(Y(I+1))
2460     LINE (X1,Y1)-(XF,YF),2
2470 NEXT I

```

```

2471 FOR I=1 TO NBE
2472   XX=FNXDOR(X(I))
2473   YY=FNXDOR(Y(I))
2474   PSET(XX,YY),1
2475 NEXT I
2480 A$=INKEY$:IF A$="" THEN 2480
2481 'DEF SEG= &HBB00
2482 'BSAVE "bound",0,&H4000
2483 'DEF SEG
2490 SCREEN 2:SCREEN 0:COLOR 2
2500 RETURN
2510 '
2520 ' herein the boundary conditions are interpreted
2530 '
2540 CODE=COND(L,1)
2550 IF CODE=1 THEN COND(L,2)=0:COND(L,3)=A1:COND(L,4)=A2:RETURN
2560 IF CODE=2 THEN COND(L,2)=A1:COND(L,3)=0:COND(L,4)=A2:RETURN
2570 IF CODE=3 THEN COND(L,2)=A1:COND(L,3)=A2:COND(L,4)=0:RETURN
2580 IF CODE=4 THEN COND(L,2)=A1:COND(L,3)=0:COND(L,4)=0:RETURN
2590 IF CODE=5 THEN COND(L,2)=A1:COND(L,3)=0:COND(L,4)=0:RETURN
2600 RETURN
3000 '
3010 'herein q(aft) and q(bef) are calculated for type 4 nodes
3020 '
3030 FOR N=1 TO NBE
3040   IF COND(N,1)<>4 THEN GOTO 3250
3050   IF N=1 THEN NA=NBE ELSE NA=N-1
3060   IF N=NBE THEN ND=1 ELSE ND=N+1
3070   DFIA=COND(N,2)-COND(NA,2)
3080   DYD=Y(ND)-Y(N)
3090   DFID=COND(ND,2)-COND(N,2)
3100   DYA=Y(N)-Y(NA)
3110   NUME=DFIA*DYG-DFID*DYA
3120   DXA=X(N)-X(NA)
3130   DXD=X(ND)-X(N)
3135   L1=SQR(DXA^2+DYA^2)
3136   L2=SQR(DXD^2+DYD^2)
3140   DENO=DXA*DYD-DXD*DYA
3150   BRAX=NUME/DENO
3160   NUME=DXA*DFID-DFIA*DXD
3170   GRAY=NUME/DENO
3210   NUME=BRAX*DYA-BRAY*DXA
3220   COND(N,3)=NUME/L1
3230   NUME=BRAX*DYD-BRAY*DXD
3240   COND(N,4)=NUME/L2
3250 NEXT N
3260 RETURN
9000 '
9010 ' This subroutine performs the assembly process
9020 ' Ind= node ordes inside the element
9030 '
9040 CODE=COND(MNNN,1)
9041 NCO=NODO-ICOND4

```

```

9042 IF IND=1 THEN NFI=NF11 ELSE NFI=NF12
9050 IF IND=1 THEN B=B1:A=A1 ELSE B=B2:A=A2
9055 IF IND=1 THEN FLU=COND(NNNN,4) ELSE FLU=COND(NNNN,3)
9060 FUN=COND(NNNN,2)
9070 ON CODE GOTO 9090,9130,9170,9210,9230
9080 '
9090 COEF(NCO,NFI)=COEF(NCO,NFI)+A
9100 COEF(NCO,NEC+1)=COEF(NCO,NEC+1)+B*FLU
9110 RETURN
9120 '
9130 COEF(NCO,NEC+1)=COEF(NCO,NEC+1)-A*FUN-(IND-2)*B*FLU
9140 COEF(NCO,NFI)=COEF(NCO,NFI)-B*(IND-1)
9150 RETURN
9160 '
9170 COEF(NCO,NEC+1)=COEF(NCO,NEC+1)-A*FUN+(IND-1)*B*FLU
9180 COEF(NCO,NFI)=COEF(NCO,NFI)+B*(IND-2)
9190 RETURN
9200 '
9210 COEF(NCO,NEC+1)=COEF(NCO,NEC+1)-A*FUN+B*FLU
9212 RETURN
9220 '
9230 COEF(NCO,NEC+1)=COEF(NCO,NEC+1)-A*FUN
9240 COEF(NCO,NFI)=COEF(NCO,NFI)-B
9250 RETURN
11000 ' Solution of the system of simultaneous equations
11010 '
11011 CLS:PRINT "The simultaneous linear equations are being solved"
11020 DIM VEC(NEC),AL(NEC+1)
11021 'FOR I=1 TO NEC
11022 '  FOR J=1 TO NEC+1
11023 '      PRINT COEF(I,J);
11024 '      LPRINT COEF(I,J);
11025 '  NEXT J
11026 'PRINT:LPRINT
11027 'NEXT I
11030 FOR I=1 TO NEC-1
11040   IN=0
11050   ME=0
11060   FOR J=1 TO NEC
11070     IF (ABS(COEF(J,I))>ME) THEN ME=ABS(COEF(J,I)):IN=J
11080   NEXT J
11081   IF IN=0 THEN PRINT "singular matrix":STOP
11090   FOR J=1 TO NEC+1
11100     VI=COEF(I,J)
11110     COEF(I,J)=COEF(IN,J)
11120     COEF(IN,J)=VI
11130   NEXT J
11140   FOR K=I TO NEC+1
11150     AL(K)=COEF(I,K)/COEF(I,I)
11160   NEXT K

```

```

11170 FOR K=I+1 TO NEC
11180     MA=COEF(K,I)
11190     FOR J=1 TO NEC+1
11200         COEF(K,J)=COEF(K,J)-AL(J)*MA
11210     NEXT J
11220 NEXT K
11230 NEXT I
11240 VEC(NEC)=COEF(NEC,NEC+1)/COEF(NEC,NEC)
11250 FOR K=NEC-1 TO 1 STEP -1
11260     SUMA=0
11270     FOR KK=K+1 TO NEC
11280         SUMA=SUMA-VEC(KK)*COEF(K,KK)
11290     NEXT KK
11300     VEC(K)=(COEF(K,NEC+1)+SUMA)/COEF(K,K)
11305 NEXT K
11310 RETURN
15000 '
15010 ' This subroutine intreprets the results
15020 '
15025 ICOND4=0
15030 FOR NODD=1 TO NBE
15035     NNODD=NODD-ICOND4
15050     CODE=COND(NNODD,1)
15060     ON CODE GOTO 15080,15090,15100,15110,15120
15070 '
15080     COND(NNODD,2)=VEC(NNODD):GOTO 15125
15090     COND(NNODD,3)=VEC(NNODD):GOTO 15125
15100     COND(NNODD,4)=VEC(NNODD):GOTO 15125
15110     ICOND4=ICOND4+1:GOTO 15125
15120     COND(NNODD,3)=VEC(NNODD):COND(NNODD,4)=VEC(NNODD):GOTO 15125
15125 NEXT NODD
15130 RETURN
20000 '
20010 ' Solution printing
20020 '
20030 CLS:PRINT "The solution has been obtained, do you want it to be printed?"
20040 PRINT "":PRINT "(enter y or n)"
20050 AS=INKEY$:IF AS="" THEN GOTO 20050
20055 IF (AS<>"Y" AND AS<>"y") THEN RETURN
20056 LPRINT CHR$(15)
20060 CLS:PRINT " Node Code      §      δ§/δn (bef)  δ§/δn (aft)"
20061 LPRINT:LPRINT:LPRINT
20062 LPRINT "R E S U L T S "
20063 LPRINT "=====":LPRINT
20070 LPRINT " Node Code      §      δ§/δn (bef)  δ§/δn (aft)"
20071 LPRINT " -----"
20080 FOR I=1 TO NBE
20090     PRINT USING "###  ## ";I;COND(I,1);
20100     PRINT USING " +.#####^";COND(I,2);COND(I,3);COND(I,4)
20110     LPRINT USING "###  ## ";I;COND(I,1);
20120     LPRINT USING " +.#####^";COND(I,2);COND(I,3);COND(I,4)
20130 NEXT I
20140 RETURN

```



```

50000 '
50010 ' This subroutine computes the values of the fuction at inside points
50020 '
50030 CLS:PRINT:PRINT :PRINT "Now you can compute the function at any point insi
de the domain."
50040 PRINT "If desired You can draw isolines so."
50050 PRINT:PRINT:PRINT "Enter Y if you want any of those options, otherwise pre
ss any key."
50060 A$=INKEY$:IF A$="" THEN GOTO 50060
50070 IF (A$<>"Y" AND A$<>"y") THEN END
50080 '
50090 '
50100 ' The control is transferred to a second segment being at the disk
50110 ' If this program is wanted to work all together just copy downwars
50120 ' the program located at "inside in this disk"
50130 '
50140 '
50150 OPEN "paso" FOR OUTPUT AS #1
50160 PRINT #1,NBE
50170 FOR I=1 TO NBE
50180   PRINT #1,COND(I,1),COND(I,2),COND(I,3),COND(I,4)
50190 NEXT I
50191 FOR I=1 TO NBE
50192   PRINT #1,X(I),Y(I)
50193 NEXT I
50200 FOR TIP=1 TO 2
50210   FOR NPI=1 TO 4
50220     PRINT #1,N1(TIP,NPI),N2(TIP,NPI),W(TIP,NPI)
50230   NEXT NPI
50240 NEXT TIP
50241 CLOSE #1
50250 ' CHAIN "inside"

```

```

5 'PROGRAM   INSIDE
10 OPTION BASE 1
20 OPEN "paso" FOR INPUT AS #1
30 INPUT #1,NBE
40 DIM X(NBE),Y(NBE),COND(NBE,4)
50 DIM N1(2,4),N2(2,4),W(2,4)
60 FOR I=1 TO NBE
70     INPUT #1,COND(I,1),COND(I,2),COND(I,3),COND(I,4)
80 NEXT I
90 FOR I=1 TO NBE
91     INPUT #1,X(I),Y(I)
92 NEXT I
93 FOR TIP=1 TO 2
94     FOR NPI=1 TO 4
95         INPUT #1,N1(TIP,NPI),N2(TIP,NPI),W(TIP,NPI)
96     NEXT NPI
97 NEXT TIP
98 CLOSE #1
100 CLS:PRINT "Are you going to read the data from any file"
110 PRINT "Enter (y o n)"
120 A$=INKEY$:IF A$="" THEN GOTO 120
130 IF (A$<>"Y" AND A$<>"y") THEN GOTO 240
140 CLS :INPUT "Enter file name":A$
150 OPEN A$ FOR INPUT AS #1
160 INPUT #1,NIP
170 DIM X1(NIP),Y1(NIP)
180 DIM POT(NIP)
190 FOR I=1 TO NIP
200     INPUT #1,X1(I),Y1(I)
210 NEXT I
220 CLOSE #1
230 GOTO 460
240 '
250 CLS:INPUT " Enter number of points ";NIP
260 DIM X1(NIP),Y1(NIP),POT(NIP)
270 CLS:PRINT "Enter coordinates as indicated. Partial automatic generation is allowed"
280 PRINT "Point No. , X , Y "
290 PRINT :PRINT
300 K=0
310 FOR I=1 TO NIP
320     IF (K=NIP) THEN GOTO 460
330     INPUT " ";L,X1(L),Y1(L)
340     IF (L=(K+1)) THEN K=K+1:GOTO 440
350     INCRE=L-K
360     AR=(X1(L)-X1(K))/INCRE
370     AZ=(Y1(L)-Y1(K))/INCRE
380     IN=INCRE-1
390     FOR M=1 TO IN
400         X1(K+M)=X1(K)+AR*M
410         Y1(K+M)=Y1(K)+AZ*M
420     NEXT M
430     K=K+INCRE
440 NEXT I
450 ' The coordinates of interior points have read
460 '
470 CLS:PRINT " Do you want to print the coordinates ? (Y o N) "

```

```

480 A$=INKEY$:IF A$="" THEN GOTO 480
490 IF (A$<>"Y" AND A$<>"y") THEN GOTO 610
500 '
510 '
520 'printing the coordinates
530 '
540 CLS
550 PRINT "Coordiantes points inside the domain"
560 PRINT "===== ====="
570 LPRINT "Coordiantes points inside the domain"
580 LPRINT "===== ====="
590 FOR I=1 TO NIP
600     PRINT USING "##";I;
610     PRINT USING " +.####^";XI(I);YI(I)
620     LPRINT USING "##";I;
630     LPRINT USING " +.####^";XI(I);YI(I)
640 NEXT I
650 '
660 '
670 '
680 ' Begining computations
690 '
700 ' Weight = transformed weights
710 '
720 FOR EL=1 TO NBE
730     JEL=EL+1
740     IF (EL=NBE) THEN JEL=1
750     X1=X(EL)
760     Y1=Y(EL)
770     X2=X(JEL)
780     Y2=Y(JEL)
790     DX=X2-X1
800     DY=Y2-Y1
810     LONG=SQR(DX*DX+DY*DY)
820     UN1=DY/LONG
830     UN2=-DX/LONG
840     FOR PUN=1 TO NPI
850         B1=0:B2=0:A1=0:A2=0
860         XP=X1(PUN)
870         YP=Y1(PUN)
880         DX=X1-XP
890         DY=Y1-YP
900         R=SQR(DX*DX+DY*DY)
910         UR1=DX
920         UR2=DY
930         DIS=UR1*UN1+UR2*UN2
940         ' Criteria for computing npi should be introduced
950         NPI=4:TIP=1
960         FOR K=1 TO NPI
970             XLDC=N1(TIP,K)*X1+N2(TIP,K)*X2
980             YLOC=N1(TIP,K)*Y1+N2(TIP,K)*Y2
990             R=SQR((XLDC-XP)^2-(YLOC-YP)^2)
1000             G=LOG(R)*W(TIP,K)
1010             B1=B1-N1(TIP,K)*G
1020             B2=B2-N2(TIP,K)*G
1030             H=DIS/R^2*W(TIP,K)
1040             A1=A1-H*N1(TIP,K)
1050             A2=A2-H*N2(TIP,K)
1060         NEXT K

```

```

1070      A1=A1*LONG/2
1080      A2=A2*LONG/2
1090      B1=B1*LONG/2
1100      B2=B2*LONG/2
1110      F1=B1*COND(EL,4)+B2*COND(JEL,3)-A1*COND(EL,2)-A2*COND(JEL,2)
1120      PDT(PUN)=PDT(PUN)+F1
1130  NEXT PUN
1140 NEXT EL
1141 FOR I=1 TO NIP
1142   POT(I)=PDT(I)/2/3.141592654#
1143 NEXT I
1150 '
1160 '
1170 '
1180 ' The calculations have been completed
1190 '
1200 '
1210 ' Now the results can be printed if desired
1220 CLS:PRINT "Do you want the results to be printed? (Y or N):"
1230 A$=INKEY$:IF A$="" THEN GOTO 1230
1240 IF (A$<>"Y" AND A$<>"y") THEN GOTO 5000
1250 CLS:PRINT " X      Y      Z      "
1260 FOR PUN=1 TO NIP
1270   PRINT USING " +.###^";X1(PUN);Y1(PUN);PDT(PUN)
1280   LPRINT USING " +.###^";X1(PUN);Y1(PUN);PDT(PUN)
1290 NEXT PUN
5000 '
5010 '
5020 '
5030 ' Here the isolines are drawn if desired
5040 '
5050 '
5060 '
5070 CLS:PRINT "Do you want the isolines to be drawn ? (Y or N):"
5075 A$=INKEY$:IF A$="" THEN GOTO 5075
5080 IF (A$<>"Y" AND A$<>"y") THEN GOTO 10000
5090 CLS
5100 NNOD=NBE+NIP
5110 OPEN "trans" FOR OUTPUT AS #1
5120 PRINT #1,NNOD
5130 FOR I=1 TO NBE
5140   PRINT #1,X(I),Y(I)
5150 NEXT I
5160 FOR I=1 TO NIP
5170   PRINT #1,X1(I),Y1(I)
5180 NEXT I
5190 FOR I=1 TO NBE
5200   PRINT #1,COND(I,2)
5210 NEXT I
5220 FOR I=1 TO NIP
5230   PRINT #1,POT(I)
5240 NEXT I
5250 CLOSE #1
5260 CHAIN "dibujo"

```

```

10 REM *****
20 REM *****
30 REM ***** programa DIBUJO *****
40 REM *****
50 REM *****
51 CLS:INPUT "Numero del maximo punto de apoyo ";NBE
60 OPTION BASE 1
70 DIM FI(4),Y(4),Y(4),XC(2),YC(2),NOD(4)
80 INCREM=.4
90 REM
100 REM
110 REM
120 REM
130 REM ENTRADA DE DATOS
140 REM *****
150 CLS
155 OPEN "trans" FOR INPUT AS #1
160 INPUT #1,NMOD
170 IF NMOD=3 THEN NODMAX=4 ELSE NODMAX=NMOD
180 DIM FINOD(NODMAX),CORNOD(NODMAX,2)
181 FOR I=1 TO NMOD
182 INPUT #1,CORNOD(I,1),CORNOD(I,2)
183 NEXT I
184 FOR I=1 TO NMOD
185 INPUT #1,FINOD(I)
186 NEXT I
187 IF NMOD=3 THEN CORNOD(4,1)=CORNOD(3,1):CORNOD(4,2)=CORNOD(3,2)
188 IF NMOD=3 THEN FINOD(4)=FINOD(3)
189 CLOSE #1
190 CLS
200 PRINT "Quiere leer los datos de un fichero (s o n)?"
210 A$=INKEY$:IF A$="" THEN GOTO 210
220 IF (A$<>"S" AND A$<>"s") THEN CLS:GOTO 330
230 CLS:INPUT "Nombre de fichero ";A$
240 OPEN A$ FOR INPUT AS #2
250 INPUT #2,ELEMAX
255 DIM NODEL(ELEMAX,4)
260 FOR I=1 TO ELEMAX
270 FOR J=1 TO 4
280 INPUT #2,NODEL(I,J)
290 NEXT J
300 NEXT I
305 CLOSE #2
310 GOTO 550
330 CLS:INPUT "Numero de elementos ";ELEMAX
340 DIM NODEL(ELEMAX,4)
350 PRINT "INTRODUCIR LA NUMERACION DE LOS NODOS DE CADA ELEMENTO"
360 PRINT "(si el elemento es triangular hacer coincidir los dos ultimos)"
370 PRINT
380 IF I=ELEMAX THEN 540
390 IANT=I
400 INPUT"NUMERO DE ELEMENTO";I
410 INPUT " nodo I";NODEL(I,1)
420 INPUT " nodo J";NODEL(I,2)
430 INPUT " nodo K";NODEL(I,3)
440 INPUT " nodo L";NODEL(I,4)
450 INPUT "incremento para generacion automatica";INCNOB
460 PRINT
470 IF INCNOB=0 THEN 380

```

```

480 FOR K=IANT+1 TO I-1
490     FOR J=1 TO 4
500         NODEL(K,J)=NODEL(K-1,J)+INCNOO
510     NEXT J
520 NEXT K
530 GOTO 380
540 CLS
550 CLS
560 PRINT"DESEA FIJAR LOS VALORES DE LA LINEA DE NIVEL (si=1,no=0)";
570 INPUT OPC1
580 IF OPC1=1 THEN 620
590 IF OPC1=0 THEN GOSUB 4340
600 IF OPC1=0 THEN 770
610 GOTO 550
620 CLS
630 PRINT "NUMERO DE LINEAS DE NIVEL";
640 INPUT NUMFI
650 PRINT
660 PRINT
670 DIM FIVAL(NUMFI)
680 PRINT "VALORES DE LA FUNCION PARA LOS QUE SE DESEAN LINEAS "
690 PRINT
700 FOR I=1 TO NUMFI
710 PRINT "VALOR";I;
720 INPUT FIVAL(I)
730 NEXT I
740 REM
750 REM
760 REM
770 REM     DIBUJO DE LA MALLA
780 REM *****
790 REM
800 REM busqueda de los valores maximos y minimos de las coordenadas
810 REM
820 XMAX=CORNOD(1,1)
830 XMIN=CORNOD(1,1)
840 YMAX=CORNOD(1,2)
850 YMIN=CORNOD(1,2)
860 FOR I=2 TO NODMAX
870     IF CORNOD(I,1)>XMAX THEN XMAX=CORNOD(I,1)
880     IF CORNOD(I,1)<XMIN THEN XMIN=CORNOD(I,1)
890     IF CORNOD(I,2)>YMAX THEN YMAX=CORNOD(I,2)
900     IF CORNOD(I,2)<YMIN THEN YMIN=CORNOD(I,2)
910 NEXT I
920 REM
930 REM
940 REM calculo del factor de escala y posicionamiento del dibujo
950 IF ((XMAX-XMIN)/(YMAX-YMIN))>(303/199) THEN FS=303/(XMAX-XMIN) ELSE FS=199/(
YMAX-YMIN)
960 DESX=INT((303-FS*(XMAX-XMIN))/2)+16
970 DESY=INT((199-FS*(YMAX-YMIN))/2)
980 CLS
990 SCREEN 1
1000 COLOR 1
1010 KEY OFF
1020 COLIN=1
1030 REM
1040 REM

```

```

1050 FOR I=1 TO ELEMEX
1060   FOR J=1 TO 4
1070     NOD(J)=NOD(1,J)
1080     NEXT J
1090     FOR J=1 TO 4
1100       IF J=4 THEN JM1=1 ELSE JM1=J+1
1101     PRI=NOD(J):SEG=NOD(JM1)
1102     IF (PRI>NBE OR SEG>NBE) THEN GOTO 1160
1110       X1=CORNOD(NOD(J),1)
1120       Y1=CORNOD(NOD(J),2)
1130       X2=CORNOD(NOD(JM1),1)
1140       Y2=CORNOD(NOD(JM1),2)
1150       GOSUB 4760
1160     NEXT J
1170 NEXT I
1180 REM
1190 REM
1200 REM   CALCULO DE LA LINEA DE NIVEL
1210 REM *****
1220 COLIN=2
1230 N=0
1240 N=N+1
1250   IF N>ELEMEX THEN 4121
1260   NOD1=NOD(1,N)
1270   NOD2=NOD(2,N)
1280   NOD3=NOD(3,N)
1290   NOD4=NOD(4,N)
1300   X(1)=CORNOD(NOD1,1)
1310   X(2)=CORNOD(NOD2,1)
1320   X(3)=CORNOD(NOD3,1)
1330   X(4)=CORNOD(NOD4,1)
1340   Y(1)=CORNOD(NOD1,2)
1350   Y(2)=CORNOD(NOD2,2)
1360   Y(3)=CORNOD(NOD3,2)
1370   Y(4)=CORNOD(NOD4,2)
1380   FI(1)=FINOD(NOD1)
1390   FI(2)=FINOD(NOD2)
1400   FI(3)=FINOD(NOD3)
1410   FI(4)=FINOD(NOD4)
1420   K=0
1430   K=K+1
1440   IF NUMFI<K THEN 1240 ELSE 1450
1450   FI=FI(1)
1460 REM
1470 REM
1480 REM   calculo de los valores maximo y minimo de los vertices
1490   REM
1500   FIMAX=FI(1)
1510   FIMIN=FI(1)
1520   FOR I=2 TO 4
1530     IF FI(I)>FIMAX THEN FIMAX=FI(I)
1540     IF FI(I)<FIMIN THEN FIMIN=FI(I)
1550   NEXT I
1560 REM
1570 REM   comprobacion de que hay linea de nivel
1580 REM
1590   IF FI>FIMAX OR FI<FIMIN THEN 4120
1600 REM
1610 REM   discernir el numero de lados del elemento
1620 REM
1630   IF X(4)=X(3) AND Y(4)=Y(3) THEN 3530

```

```

1640 REM
1650 REM
1660 REM
1670 REM PARA ELEMENTOS DE CUATRO LADOS
1680 REM *****
1690 REM
1700 IF F1(1)=F1 OR F1(2)=F1 OR F1(3)=F1 OR F1(4)=F1 THEN 2850
1710 IF (F1(1)+F1(2))/2=F1 AND (F1(2)+F1(3))/2=F1 AND (F1(3)+F1(4))/2=F
I AND (F1(4)+F1(1))/2=F1 THEN 2710
1720 REM
1730 REM la linea o lineas de nivel son interiores
1740 REM
1750 A=(F1(1)-F1(2)+F1(3)-F1(4))/4
1760 B=(-F1(1)+F1(2)+F1(3)-F1(4))/4
1770 C=(-F1(1)-F1(2)+F1(3)+F1(4))/4
1780 D=(F1(1)+F1(2)+F1(3)+F1(4))/4
1790 II=0
1800 II=II+1
1810 FOR I=II TO 4
1820 II=I
1830 IF I=4 THEN IM1=1 ELSE IM1=I+1
1840 IF F1(I)<(F1 AND F1(IM1))>F1 THEN 1880
1850 NEXT I
1860 GOTO 4120
1870 REM
1880 REM comienza una linea de nivel
1890 REM
1900 IF I=1 THEN 1990
1910 IF I=2 THEN 2030
1920 IF I=3 THEN 2070
1930 REM
1940 REM
1950 FXI=-1
1960 INC=INCREM
1970 GOTO 2440
1980 REM
1990 PETA=-1
2000 INC=INCREM
2010 GOTO 2150
2020 REM
2030 PXI=1
2040 INC=-INCREM
2050 GOTO 2440
2060 REM
2070 PETA=1
2080 INC=-INCREM
2090 GOTO 2150
2100 REM
2110 REM
2120 REM
2130 REM trazado de la linea variando la coordenada ETA
2140 REM
2150 X11=(F1-C*PETA-D)/(A*PETA+B)
2160 ETA1=PETA
2170 FOR ETA=PETA+INC TO -PETA STEP INC
2180 X12=(F1-C*ETA-D)/(A*ETA+B)
2190 ETA2=ETA
2200 IF X12>1 THEN 2280
2210 IF X12<-1 THEN 2350
2220 GOSUB 4140
2230 X1=X12
2240 ETA1=ETA2
2250 NEXT ETA
2260 GOTO 1800

```



```

2270 REM
2280      XI2=1
2290      ETA2=(F1-B-D)/(A+C)
2300      IF ABS(ETA2)>1 THEN 2350
2310      GOSUB 4140
2320      GOTO 1800
2330 REM
2340 REM
2350      XI2=-1
2360      ETA2=(F1+B-D)/(-A+C)
2370      IF ABS(ETA2)>1 THEN 2280
2380      GOSUB 4140
2390      GOTO 1800
2400 REM
2410 REM
2420 REM trazado de la linea variando la coordenada XI
2430 REM
2440      ETA1=(F1-B*PX1-D)/(A*PX1+C)
2450      XI1=PX1
2460      FOR XI=PX1+INC TO -PX1 STEP INC
2470          ETA2=(F1-B*XI-D)/(A*XI+C)
2480          XI2=XI
2490          IF ETA2=>1 THEN 2570
2500          IF ETA2<=-1 THEN 2640
2510          GOSUB 4140
2520          ETA1=ETA2
2530          XI1=XI2
2540      NEXT XI
2550      GOTO 1800
2560 REM
2570      ETA2=1
2580      XI2=(F1-C-D)/(A+B)
2590      IF ABS(XI2)>1 THEN 2640
2600      GOSUB 4140
2610      GOTO 1800
2620 REM
2630 REM
2640      ETA2=-1
2650      XI2=(F1+C-D)/(-A+B)
2660      IF ABS(XI2)>1 THEN 2570
2670      GOSUB 4140
2680      GOTO 1800
2690 REM
2700 REM
2710 REM
2720 REM los ejes naturales son lineas de nivel
2730 REM
2740      ETA1=-1
2750      XI1=0
2760      ETA2=1
2770      XI2=0
2780      GOSUB 4140
2790      ETA1=0
2800      XI1=1
2810      ETA2=0
2820      XI2=-1
2830      GOSUB 4140
2840      GOTO 4120
2850 REM

```

```

2860 REM
2870 REM hay linea de nivel en los lados
2880 REM
2890 FOR I=1 TO 4
2900 IF I=4 THEN IM1=1 ELSE IM1=I+1
2910 IF I=1 THEN IR1=4 ELSE IR1=I-1
2920 IF F1(I)=F1 AND F1(IM1)=F1 THEN 2990
2930 IF F1(I)=F1 AND F1(IR1)=F1 THEN 2950
2940 IF (F1(I)=F1 AND (F1=F1MAX OR F1=F1MIN)) THEN 3470 ELSE 17
30
2950 NEXT I
2960 REM
2970 GOTO 4120
2980 REM
2990 REM el lado I-IM1 es una linea de nivel
3000 REM
3010 X1=X(I)
3020 Y1=Y(I)
3030 X2=X(IM1)
3040 Y2=Y(IM1)
3050 GOSUB 4760
3060 IF IR1=1 THEN IR2=4 ELSE IR2=IR1-1
3070 IF (F1(IR1)>F1 AND F1(IR2)<F1) OR (F1(IR1)<F1 AND F1(IR2)>F1) THE
N 3100
3080 GOTO 2950
3090 REM
3100 REM hay una linea de nivel perpendicular a un lado
3110 REM
3120 IF I=1 THEN 3170
3130 IF I=2 THEN 3240
3140 IF I=3 THEN 3310
3150 IF I=4 THEN 3380
3160 REM
3170 X11=1-2*(F1(3)-F1)/(F1(3)-F1(4))
3180 X12=X11
3190 ETA1=-1
3200 ETA2=1
3210 GOSUB 4140
3220 GOTO 4120
3230 REM
3240 ETA1=1-2*(F1(4)-F1)/(F1(4)-F1(1))
3250 ETA2=ETA1
3260 X11=-1
3270 X12=1
3280 GOSUB 4140
3290 GOTO 4120
3300 REM
3310 X11=-1+2*(F1(1)-F1)/(F1(1)-F1(2))
3320 X12=X11
3330 ETA1=-1
3340 ETA2=1
3350 GOSUB 4140
3360 GOTO 4120
3370 REM
3380 ETA1=-1+2*(F1(2)-F1)/(F1(2)-F1(3))
3390 ETA2=ETA1
3400 X11=-1
3410 X12=1
3420 GOSUB 4140
3430 GOTO 4120
3440 REM

```

```

3450 REM
3460 REM
3470 REM   el vertice I es una linea de nivel
3480 REM
3490       X1=X(I)
3500       Y1=Y(I)
3510       GOSUB 4860
3520       GOTO 2950
3530 REM
3540 REM
3550 REM
3560 REM       PARA ELEMENTOS DE TRES LADOS
3570 REM *****
6050 REM
3580 REM
3590       C=0
3600       IF F1(I)=F1 OR F1(2)=F1 OR F1(3)=F1 THEN 3840
3610 REM
3620 REM   la linea de nivel es interior
3630 REM
3640       FOR I=1 TO 3
3650           IF I=3 THEN IM1=1 ELSE IM1=I+1
3660           IF (F1(I)<F1 AND F1(IM1)>F1) OR (F1(I)>F1 AND F1(IM1)<F1
3670 ) THEN 3680
3680       NEXT I
3690 REM
3700 REM   interpolacion en los lados del triangulo
3710       C=C+1
3720       XC(C)=X(I)+(F1(I)-F1)*(X(IM1)-X(I))/(F1(I)-F1(IM1))
3730       YC(C)=Y(I)+(F1(I)-F1)*(Y(IM1)-Y(I))/(F1(I)-F1(IM1))
3740       IF C=1 THEN 3670
3750 REM
3760 REM   dibujo de la linea
3770 REM
3780       X1=XC(1)
3790       Y1=YC(1)
3800       X2=XC(2)
3810       Y2=YC(2)
3820       GOSUB 4760
3830 GOTO 4120
3840 REM
3850 REM
3860 REM   hay linea de nivel en los lados
3870 REM
3880       FOR I=1 TO 3
3890           IF I=3 THEN IM1=1 ELSE IM1=I+1
3900           IF I=1 THEN IR1=3 ELSE IR1=I-1
3910           IF F1(I)=F1 AND F1(IM1)=F1 THEN 3970
3920           IF F1(I)=F1 AND F1(IR1)=F1 THEN 3940
3930           IF F1(I)=F1 AND (F1=F1MAX OR F1=F1MIN) THEN 4030 ELSE 3620
3940       NEXT I
3950       GOTO 4120
3960 REM
3970 REM   el lado I-IM1 es una linea de nivel
3980       X1=X(I)
3990       Y1=Y(I)
4000       X2=X(IM1)
4010       Y2=Y(IM1)
4020       GOSUB 4760
4030 REM

```

```

4040 REM    el punto l es una linea de nivel
4050      X1=X(I)
4060      GOTO 3940
4070      Y1=Y(I)
4080      GOSUB 4860
4090      GOTO 4120
4100 REM
4110 REM
4120 GOTO 1430
4121 A$=INKEY$:IF A$="" THEN GOTO 4121
4122 'DEF SEG= &HEB00
4123 'BSAVE "don",0,&H4000
4124 'DEF SEG
4125 SCREEN 2:SCREEN 0
4130 END
4140 REM
4150 REM          SUBROUTINA DE TRAZADO
4160 REM*****
4170 N11=(1-X11)*(1-ETA1)
4180 N21=(1+X11)*(1-ETA1)
4190 N31=(1+X11)*(1+ETA1)
4200 N41=(1-X11)*(1+ETA1)
4210 N12=(1-X12)*(1-ETA2)
4220 N22=(1+X12)*(1-ETA2)
4230 N32=(1+X12)*(1+ETA2)
4240 N42=(1-X12)*(1+ETA2)
4250 X1=(N11*X(1)+N21*X(2)+N31*X(3)+N41*X(4))/4
4260 Y1=(N11*Y(1)+N21*Y(2)+N31*Y(3)+N41*Y(4))/4
4270 X2=(N12*X(1)+N22*X(2)+N32*X(3)+N42*X(4))/4
4280 Y2=(N12*Y(1)+N22*Y(2)+N32*Y(3)+N42*Y(4))/4
4290 GOSUB 4760
4300 RETURN
4310 REM
4320 REM
4330 REM
4340 REM
4350 REM
4360 REM          SUBROUTINA DE CALCULO DE LOS VALORES DE LA FUNCION A DIBUJAR
4370 REM*****
4380 REM
4390 REM    busqueda de los valores maximo y minimo de funcion
4400 REM
4410 CLS
4420 FIMAX=FINOD(1)
4430 FIMIN=FINOD(1)
4440 FOR I=2 TO NODMAX
4450     IF FINOD(I)<FIMIN THEN FIMIN=FINOD(I)
4460     IF FINOD(I)>FIMAX THEN FIMAX=FINOD(I)
4470 NEXT I
4480 REM
4490 REM    calculo del numero de lineas y del primer valor
4500 REM
4510 CLS
4520 PRINT "VALOR DEL SALTO ENTRE LAS LINEAS DE NIVEL";
4530 INPUT INCFI
4540 NUMFI=INT((FIMAX-FIMIN)/INCFI)
4550 FIVAL1=FIMIN
4560 FIVAL1=FIVAL1+INCFI
4570 NUMFI=NUMFI-1
4580 PRINT

```

```

4600 PRINT "SE DIBUJARAN";NUMFI;"LINEAS,EMPEZANDO EN EL VALOR";FIVAL1
4610 PRINT
4620 PRINT "DESEA MODIFICARLO (si=1 no=0)";
4630 INPUT OPC1
4640 IF OPC1=1 THEN 4510
4650 IF OPC1=0 THEN 4700
4660 GOTO 4620
4670 REM
4680 REM      calculo de los valores de la funcion
4690 REM
4700 DIM FIVAL(NUMFI)
4710 FIVAL(1)=FIVAL1
4720 FOR I=2 TO NUMFI
4730     FIVAL(I)=FIVAL(I-1)+INCF1
4740 NEXT I
4750 RETURN
4760 REM      SUBROUTINA DE DIBUJO DE LINEAS
4770 REM *****
4780 XM1=FS*ABS(X1-XMIN)+DESX
4790 XM2=FS*ABS(X2-XMIN)+DESX
4800 YM1=FS*ABS(Y1-YMAX)+DESY
4810 YM2=FS*ABS(Y2-YMAX)+DESY
4820 LINE (XM1,YM1)-(XM2,YM2),COLIN
4830 RETURN
4840 REM
4850 REM
4860 REM      SUBROUTINA DE DIBUJO DE PUNTOS
4870 REM *****
4880 XM1=FS*ABS(X1-XMIN)+DESX
4890 YM1=FS*ABS(Y1-YMAX)+DESY
4900 PSET(XM1,YM1),COLIN
4910 RETURN

```

## REFERENCIAS

1. Zienkiewicz, D.C. (1979): 'The finite element method' (3rd.ed) McGraw Hill
2. Jaswon, M.A. (1963): 'Integral equations methods in potential theory I' .Proc. Roy. Soc. (A) 275 , 23-32.
3. Rizzo, F.J. (1967): 'An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics'. Quart. Appl. Math. 25(1) 83 - 95.
4. Cruse, T.A. (1969): 'Numerical solutions in threedimensional elastostatics.' Int. J. Solid & Struct. 5 . 1259-1274.
5. Lachat, J.C. & Watson, J.D. (1975): 'A second generation integral equation program for three-dimensional elastic analysis' in 'Boundary - Integral equation method : Computational applications in Applied mechanics' (T.A.Cruse y F.J. Rizzo, Eds) ASME, NY.
6. Hess, J.L. & Smith, A.M.O.: 'Calculation of potential flow about arbitrary bodies' in 'Progress in Aeronautical Sciences' Vol.8 (D.Kuchemann, Ed.) Pergamon.
7. Tomlin, G.R. (1972): 'Numerical analysis of continuum problems in zoned anisotropic media' Ph.D.Thesis. Southampton University.
8. Butterfield, R. (1972): 'The application of integral equation methods to continuum problems in soil mechanics' in 'Stress-Strain behaviour of soils' P4Roscoe Meml. Symp. Cambridge.Foulis.73-587
9. Banerjee, P.K. & Davis, T.G. (1978): 'The behaviour of axially and laterally loaded single piles embedded in nonhomogeneous soils' . Geotechnique 28(3) 309 -326
10. Crouch, S.L. & Starfield, A. M. (1983): 'Boundary element methods in solid mechanics' George Allen & Unwin.
11. Jaswon, M.A. y Symm, G.T. (1977): 'Integral equation methods in potential theory and elastostatics' Academic Press.

12. Brebbia , C.A. (1978): 'The boundary element method for engineers' Pentech Press.
13. Banerjee , P.K. & Butterfield ,R. (1981): 'Boundary element methods in engineering Science' Mc Graw Hill.
14. Banerjee ,P.K. & Butterfield ,R. (1979): 'Developments in boundary element methods 1' Applied Science Pub.
15. Banerjee ,P.K. & Shaw ,R.P. (1982): 'Developments in boundary element methods 2' Applied Science Pub.
16. Ligget , J.A. & Liu P.L. (1983): 'The boundary integral equation method for porous media flow' George Allen and Unwin.
17. Brebbia , C. (Ed.). (1978): 'Recent advances in boundary element methods' (Southampton). Pentech Press.
18. Brebbia ,C. (Ed.). (1980): 'New developments in boundary element methods' (Southampton). C.M.L. Publications.
19. Brebbia ,C. (Ed.). (1981): 'Boundary element methods' (Irvine) . Springer - Verlag.
20. Brebbia ,C. (Ed.). (1982): 'Boundary element methods in engineering' (Southampton). Springer - Verlag.
21. Brebbia ,C. (Ed.). (1983): 'Boundary elements' (Hiroshima) . Springer - Verlag.
22. Jimenez Salas , J.A.; Arrechea Belzunce ,J.A. (1965): 'Resolution theoriue de la distribution des forces dans les pieux'. 6th Int. Conf.. ISSMFE , Montreal , 3 : 489 -492
23. Oteo , C. (1972): 'Resistencia y deformacion lateral de los grupos de pilotes verticales , con especial consideracion de los esfuerzos alternativos' Tesis doctoral. ETSICCP . Univ. Polit. Madrid.
24. Dominguez , J. (1978): 'Calculo de tensiones en las inmediaciones de anclajes. Aplicacion del Metodo de los Elementos de Contorno' . Tesis doctoral . ETSII . Univ. Sevilla.
25. Alarcon , E.; Martin ,A. ; Paris , F. (1978): 'Improved boundary elements in torsion problems ' in 'Recent advances in BEM' (Ed. C. Brebbia ) Southampton.
26. Alarcon ,E.; Martin ,A.; Paris , F. (1979): 'Boundary elements in potential and elasticity theory' Computers & Struct. 10.
27. Paris , F. (1979): ' El metodo de los elementos de contorno en la teoria del potencial y de la elasticidad' Tesis doctoral . ETSII . Univ. Pol. Madrid.

28. Doblare ,M. (1981): 'Formulacion tridimensional del MEC con interpolacion parabolica' Tesis doctoral . ETSII . Univ. Pol . Madrid.
29. Picon ,R. (1981): 'El metodo de las discontinuidades en problemas elasticos bidimensionales' Tesis doctoral . ETSII . Univ. Sevilla.
30. Garcia-Benitez ,F. (1981): 'El MEC en elastoplasticidad tridimensional'. Tesis doctoral . ETSII .Univ. Pol . Madrid.
31. Anza , J.J. (1981): 'El MEC en problemas termoelasticos' Tesis doctoral . ETSII .Univ. Pol. Madrid.
32. Roures ,V. (1982): 'El MEC en la transmision de calor en regimen transitorio'. Tesis doctoral. ETSII .Univ . Pol. Madrid.
33. Gomez-Lera ,S. (1982): 'El MEC en plasticidad axisimetrica'. Tesis doctoral . ETSII . Univ. Pol. Madrid.
34. Garcia-Suarez , C. (1983): ' El MEC en el problema de la consolidacion' . Tesis doctoral . ETSII . Univ. Pol. Madrid.
35. Martin ,A.; Rodriguez , I.; Alarcon ,E. (1980): 'Mixed elements' in 'Recent Advances in BEM' (Ed.C.Brebbia) CML Pub.
36. Gomez-Lera , S.; Paris ,F.; Alarcon ,E. (1982): 'Treatment of singularities in 2-D domains' . App. Mathem. Modell. Vol.6. April.
37. Brebbia ,C. & Walker .S. (1980): 'Boundary element techniques in engineering' Newness-Butterworths.
38. Mukherjee, S. (1982): 'Boundary element methods in creep and fracture'. App.Science Pub.
39. Courant,R & Hilbert,D. (1962): 'Methods of mathematical physics' .Interscience Pub.
40. Jeffreys,H. & Jeffreys, B.S. (1972): 'Methods of mathematical Physics' . Cambridge U.P.
41. Carslaw ,H.S. & Jaeger , J.C. (1959): ' Conduction of heat in solids' . 2nd. ed. Clarendon Press . Oxford.
42. Kellog,O.D. (1953): ' Foundations of potential theory' .Dover.
43. Anza,J.J.; Ahedo,E.; Da Riva,I.; Alarcon, E. (1982) : 'A new boundary condition solved with BIEM' in 'Boundary Element Methods in Engineering' (C.Brebbia ed.) . Springer.
44. Mikhlin , S.G. (1964) : 'Variational methods in mathematical physics' Pergamon.



45. Stroud , A.H. & Secrest , D. (1966): 'Gaussian Quadrature Formulas'. Prentice-Hall.
46. Cristescu , M. & Loubignac , G. (1978 ) : 'Gaussian Quadrature Formulas for functions with singularities in  $1/r$  over triangles and quadrangles' in ' Recent Advances in BEM ' . Ed. C. Brebbia Pentech press
47. Abramovitz , M. & Stegun , I. (1972): ' Handbook of mathematical functions ' Dover
48. Paris , F.; Martin , A.; Alarcon , E. (1981) : ' Potential theory' Capitulo 3 in 'Progress in BEM' Ed. C. Brebbia . Pentech Press.
49. Chung , T.J. (1978): 'Finite element analysis in fluid dynamics' Mac Graw Hill
50. Hartmann , F. (1981) : 'The derivation of stiffness matrices from integral equations ' in 'BEM' ed. C. Brebbia . Springer
51. Zienckiewicz , D.C. (1977) : 'Marriage a la mode - The best of both worlds ( Finite elements and boundary integrals ) ' in Innovative Numerical Analysis in Applied Engineering Science . CETIM . Versailles.
52. Tullberg, O. & Bolteus , L. (1982): 'A critical study of Different Boundary Element Stiffness Matrices ' in ' BEM in Engineering ', ed C. Brebbia . Springer
53. Doblare , M. (1983) : Comunicacion Privada
54. Alarcon, E. (1983): 'Elementos de contorno adaptables ' Hormigon y Acero . Diciembre .